Probabilité d'une union d'événements

Ayoub Hajlaoui

Entre U à l'endroit et U la tête en bas,
Les lettres U louvoient au pays des probas.

Énoncé : Temps conseillé : 25 min

Soient A et B deux événements. On rappelle que la probabilité $P(A \cup B)$ de l'union $A \cup B$ est donnée par la formule suivante : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
où $A \cap B$ est l'intersection entre les deux événements A et B.

1) Montrer qu'on a la formule suivante pour l'union de trois événements $A \cup B \cup C$:
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

2) 50% des personnes présentes dans un hall d'aéroport ont un passeport allemand. 40% ont un passeport belge, et 30% ont un passeport canadien.
20% des personnes présentes dans ce hall ont les passeports allemand et belge.
10% des personnes présentes dans ce hall ont les passeports allemand et canadien.
10% des personnes présentes dans ce hall ont les passeports belge et canadien.
Enfin, 2% des personnes présentes dans ce hall ont les trois passeports allemand, belge, et canadien.
En prenant une personne au hasard dans ce hall d'aéroport, quelle est la probabilité de tomber sur une personne qui a au moins l'un des passeports suivants : allemand, belge, canadien ?

Correction :

1) *Rappelons que la probabilité de l'union de deux événements A et B est la probabilité que l'un au moins de ces événements se produise. On dit que l'union est un " ou inclusif ", qui comprend aussi le cas où les deux événements se produisent (ce qui correspond à $A \cap B$). C'est rarement le cas du " ou " dans la vie quotidienne : allez expliquer dans un restaurant que vous avez le droit de prendre une entrée et un dessert car le ou de " entrée ou dessert " dans leur menu serait inclusif...*
$P(A \cup B \cup C) = P\big((A \cup B) \cup C\big)$
En utilisant la formule rappelée par l'énoncé avec $A_1 = A \cup B$ et $A_2 = C$, on obtient :
$P(A \cup B \cup C) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$
Donc $P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P\big((A \cup B) \cap C\big)$
Parmi les termes obtenus, $P(A \cup B)$ s'exprimera facilement avec la formule de l'énoncé...

Donc $\underline{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P\big((A \cup B) \cap C\big)}$

On obtient déjà pas mal des termes que nous demande de trouver la question de l'énoncé... Mais que faire de $P\big((A \cup B) \cap C\big)$?

Remarquons $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
En effet, s'intéresser aux gens qui font au moins un sport parmi l'accrobranche et le basket, et qui font en même temps du canoë $\big((A \cup B) \cap C\big)$, cela revient au même que de s'intéresser aux gens qui font [de l'accrobranche et du canoë] ou [du basket et du canoë] (le "ou" étant inclusif comme expliqué précédemment). On parle de distributivité de $\cap$ sur $\cup$, (comme celle de $\times$ sur $+$)

Donc $P\big((A\cup B)\cap C\big) = P\big((A\cap C)\cup(B\cap C)\big)$

Et là, on utilise encore la formule rappelée par l'énoncé, en l'appliquant sur les événements $(A\cap C)$ *et* $(B\cap C)$ *...*

Donc $P\big((A\cup B)\cap C\big) = P(A\cap C) + P(B\cap C) - P\big((A\cap C)\cap(B\cap C)\big)$

Donc $P\big((A\cup B)\cap C\big) = P(A\cap C) + P(B\cap C) - P(A\cap B\cap C)$

puisque $(A\cap C)\cap(B\cap C) = A\cap C\cap B\cap C = A\cap B\cap C$

" Je veux un chat qui soit petit, jaune, joueur, et jaune. " On peut le dire plus rapidement :

" Je veux un chat qui soit petit, jaune, et joueur. " (et l'ordre ne compte pas)

Donc (en reprenant les deux expressions soulignées en bleu) :

$\boxed{P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)}$

2) *Il suffit de reprendre la formule démontrée précédemment...*

Appelons A, B et C les événements suivants :

- A : " la personne a un passeport allemand "
- B : " la personne a un passeport belge "
- C : " la personne a un passeport canadien "

L'énoncé nous demande de calculer $P(A\cup B\cup C)$.

Attention, quand on nous dit que 50% *des personnes ont un passeport allemand, ça ne leur interdit pas d'avoir un autre passeport... C'est pourquoi, en sommant le pourcentage de personnes ayant un passeport allemand, le pourcentage de personnes ayant un passeport belge, et celui de personnes ayant un passeport canadien, on peut dépasser* 100%*...*

D'après l'énoncé, $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,4$; et $P(C) = 0,3$.

De plus, $P(A\cap B) = 0,2$; $P(A\cap C) = 0,1$; et $P(B\cap C) = 0,1$.

Enfin, $P(A\cap B\cap C) = 0,02$.

En utilisant la formule obtenue en 1), on a donc :

$P(A\cup B\cup C) = 0,5 + 0,4 + 0,3 - 0,2 - 0,1 - 0,1 + 0,02 = 0,82$

$\boxed{\text{La probabilité de tomber sur une personne ayant au moins l'un des trois passeports cités est donc de } 0,82.}$