Puissance de somme et somme de puissances

Ayoub Hajlaoui

Le regard étourdi, la vacance m'assomme :
J'écris sur mon ordi des puissances de sommes.

Énoncé : *De la Terminale S à la prépa* (Temps conseillé : 25 min)

Soit un réel $\lambda \in]0\,;\,1[$.
1) Montrer que pour tout réel strictement positif x, $(1+x)^\lambda \leq 1 + x^\lambda$
2) En déduire que pour tous réels strictement positifs a et b, $(a+b)^\lambda \leq a^\lambda + b^\lambda$

Correction :

1) Étudions la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 1 + x^\lambda - (1+x)^\lambda$
en espérant pouvoir déduire de ses variations son signe : une astuce classique pour établir une inégalité lorsqu'on ne voit pas de manière " simple " d'y aboutir.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \lambda x^{\lambda-1} - \lambda(1+x)^{\lambda-1} = \lambda\big(\dfrac{1}{x^{1-\lambda}} - \dfrac{1}{(1+x)^{1-\lambda}}\big)$

Soit on sait que sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \to x^\lambda$ se dérive de la même manière que $x \to x^n$ (avec n entier), soit on ne le sait pas et on revient à $x^\lambda = \exp\big(\lambda \ln(x)\big)$ pour le constater.

$1 - \lambda > 0$ donc la fonction puissance $x \to x^{1-\lambda} = \exp\big((1-\lambda)\ln(x)\big)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x < 1 + x$. Donc $x^{1-\lambda} < (1+x)^{1-\lambda}$.

Et donc (par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$) : $\dfrac{1}{x^{1-\lambda}} > \dfrac{1}{(1+x)^{1-\lambda}}$

Donc, pour tout $x > 0$, $f'(x) < 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

N'oublions pas que ce qui nous intéresse chez f, c'est son signe. On espère montrer que f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Vu qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il faut et il suffit que sa limite en 0 soit positive ou nulle...

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 1 + \exp\big(\lambda\ln(x)\big) - \exp\big(\lambda\ln(1+x)\big)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \lambda\ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \lambda\ln(1+x) = 0$

Donc (par continuité de la fonction exponentielle) $\lim\limits_{x\to 0} \exp\big(\lambda\ln(x)\big) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \exp\big(\lambda\ln(1+x)\big) = 1$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0.}$ De plus, $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$

$\boxed{\text{On peut donc en conclure que } f \text{ est positive sur } \mathbb{R}_+^*.}$

Autrement dit : $\forall x > 0,\ 1 + x^\lambda - (1+x)^\lambda \geq 0$. On a donc montré : $\boxed{\forall x > 0,\ (1+x)^\lambda \leq 1 + x^\lambda}$

2) *On a pas mal travaillé à la question précédente : il serait donc dommage de se lancer dans des calculs fastidieux s'ils sont évitables. Comment faire apparaître du 1 dans notre inégalité ?*

Pour tous réels strictement positifs a et b :

D'une part, $(a+b)^\lambda = [a(1+\dfrac{b}{a})]^\lambda = a^\lambda\,(1+\dfrac{b}{a})^\lambda$

D'autre part, $a^\lambda + b^\lambda = a^\lambda\,(1 + \dfrac{b^\lambda}{a^\lambda}) = a^\lambda\,\big(1 + (\dfrac{b}{a})^\lambda\big)$.

Rappelons $\dfrac{b}{a} > 0$. Donc d'après la question précédente, $(1+\dfrac{b}{a})^\lambda \leq 1 + (\dfrac{b}{a})^\lambda$

On obtient donc (en multipliant les deux membres par $a^\lambda > 0$) : $a^\lambda\,(1+\dfrac{b}{a})^\lambda \leq a^\lambda\,\big(1 + (\dfrac{b}{a})^\lambda\big)$

Donc pour tous réels strictement positifs a et b : $\boxed{(a+b)^\lambda \leq a^\lambda + b^\lambda}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com