Position du centre de gravité d'un triangle

Ayoub Hajlaoui

C'est dans la gravité d'un trop sérieux faciès
Que jeunesse fruitée devient sèche vieillesse.

Énoncé : *De la Seconde à la Première* (Temps conseillé : 30 min)

On rappelle que le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection de ses médianes.

Soit un triangle ABC (non plat) et soient D le milieu de [AB], E le milieu de [BC], et F le milieu de [AC]. Soit G le centre de gravité du triangle ABC. *Je vous conseille fortement une figure...*

L'objectif de cet exercice est de montrer que G est aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane en partant du sommet correspondant.

Autrement dit, on veut montrer : $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ (et de même, $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$, mais on se contentera de la première, les deux autres s'obtenant de façon tout à fait similaire)

On admet que le centre de gravité G vérifie l'égalité suivante : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

1) Démontrer l'égalité suivante : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\,\overrightarrow{GD}$

2) En déduire : $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

Correction :

1) *Pour démontrer cette égalité, on peut procéder de deux manières différentes :*
- par le calcul, en utilisant Chasles à bon escient
- par une méthode plus géométrique, en utilisant la règle du parallélogramme

<u>Méthode 1</u> : en utilisant la relation de Chasles :

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DB} = 2\,\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$

Pour obtenir le résultat demandé, il faut donc montrer : $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$

D est le milieu de [AB], donc $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DA}$. Autrement dit, $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BD} = \vec{0}$, c-à-d : $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$

Donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\,\overrightarrow{GD} + \vec{0}$. Donc $\boxed{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\,\overrightarrow{GD}}$

<u>Méthode 2</u> :

D est le milieu de [AB]. Soit G' le symétrique de G par rapport à D. D est alors aussi le milieu de [GG']. Autrement dit, les diagonales [GG'] et [AB] du quadrilatère GAG'B se coupent en leur milieu D. Le quadrilatère GAG'B est donc un parallélogramme.

D'après la règle du parallélogramme, on a donc : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GG'}$

Or, D est le milieu de [GG']. Donc $\overrightarrow{GG'} = 2\,\overrightarrow{GD}$. Donc $\boxed{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\,\overrightarrow{GD}}$

2) Reprenons l'égalité admise par l'énoncé : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Donc $-\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$. Donc $\boxed{\overrightarrow{CG} = 2\,\overrightarrow{GD}}$

Par ailleurs (Chasles), $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GD} = 2\,\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GD}$. Donc $\boxed{\overrightarrow{CD} = 3\,\overrightarrow{GD}}$

On en conclut : $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3} \times 3\,\overrightarrow{GD}$. Donc $\boxed{\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3} \times \overrightarrow{CD}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com