Simplification trigonométrique

Ayoub Hajlaoui

S'entraîner à dompter en été cos et sin
Des maux de la rentrée en douceur nous vaccine.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

On rappelle que pour tous réels a et b : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
Résoudre l'équation suivante dans $[0\ ;\ 2\pi[$: $\sin^4(x) - \cos^4(x) = \dfrac{1}{2}$

Correction :

1) Remarquons : $\sin^4(x) - \cos^4(x) = \big(\sin^2(x)\big)^2 - \big(\cos^2(x)\big)^2$
Donc (identité remarquable) $\sin^4(x) - \cos^4(x) = \big(\sin^2(x) - \cos^2(x)\big)\big(\sin^2(x) + \cos^2(x)\big)$
Rappelons aussi : $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
On a donc : $\sin^4(x) - \cos^4(x) = \big(\sin^2(x) - \cos^2(x)\big) \times 1 = \sin^2(x) - \cos^2(x)$
L'équation à résoudre est donc équivalente à l'équation : $\boxed{\sin^2(x) - \cos^2(x) = \dfrac{1}{2}}$

Encore un effort pour transformer le membre de gauche en quelque chose de plus simple à manier pour nous...

En appliquant la formule rappelée par l'énoncé avec $a = b = x$, on obtient :
$\cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)$
Ben oui, vu que la formule est valable pour tous réels a et b, on peut choisir les a et b qu'on veut. Autant faire un choix intelligent qui corresponde bien à notre cas.
Autrement dit, $\underline{\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)}$ *Intéressant...*

L'équation que l'énoncé nous demande de résoudre est donc équivalente à l'équation : $\boxed{\cos(2x) = -\dfrac{1}{2}}$

Et ça, pour le coup, c'est une équation que nous savons bien résoudre...
Sans oublier le signe - vu que dans notre équation, nous avions non pas $\cos^2(x) - \sin^2(x)$ *mais* $\sin^2(x) - \cos^2(x)$

$$\cos(2x) = -\frac{1}{2} \iff \cos(2x) = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) \iff \cos(2x) = \cos(\frac{2\pi}{3})$$

Pour avoir un angle dont le cos est $-\dfrac{1}{2}$ *, soit je connais mon cercle trigonométrique par cœur, soit je sais au moins que* $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ *et que pour tout x,* $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ *(et je retrouve ainsi* $\frac{2\pi}{3}$*)*

Donc $\cos(2x) = -\dfrac{1}{2} \iff \big(2x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\big)$ ou $\big(2x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\big)$
Donc $\cos(2x) = -\dfrac{1}{2} \iff \big(x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\big)$ ou $\big(x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\big)$

N'oublions pas que l'énoncé nous demande de résoudre l'équation sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi[$ *On fait donc défiler les valeurs de k (à partir de* 0*, vers les positifs puis vers les négatifs) pour voir lesquelles correspondent à des solutions dans le bon intervalle.*

<u>Pour $k = 0$</u> : $\frac{\pi}{3} + 0\pi = \frac{\pi}{3} \in [0\ ;\ 2\pi[$, mais $-\frac{\pi}{3} + 0\pi = -\frac{\pi}{3} \notin [0\ ;\ 2\pi[$

<u>Pour $k = 1$</u> : $\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} \in [0\ ;\ 2\pi[$, et $-\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \in [0\ ;\ 2\pi[$

<u>Pour $k = 2$</u> : $\frac{\pi}{3} + 2\pi \notin [0\ ;\ 2\pi[$, mais $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \in [0\ ;\ 2\pi[$

<u>Pour $k \geq 3$</u> : $\frac{\pi}{3} + k\pi \notin [0\ ;\ 2\pi[$ et $-\frac{\pi}{3} + k\pi \notin [0\ ;\ 2\pi[$

<u>Pour $k = -1$</u> : $\frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3} \notin [0\ ;\ 2\pi[$, et $-\frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{4\pi}{3} \notin [0\ ;\ 2\pi[$

<u>Pour $k \leq -2$</u> : même chose que le cas précédent

En conclusion, l'ensemble des solutions dans $[0\ ;\ 2\pi[$ de l'équation $\sin^4(x) - \cos^4(x) = \frac{1}{2}$ est :

$\boxed{\left\{\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{2\pi}{3}\ ,\ \frac{4\pi}{3}\ ,\ \frac{5\pi}{3}\right\}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com