Sommes de puissances de racines

Ayoub Hajlaoui

À l'ombre d'un café boulevard Capucines,
Sous nos yeux fatigués défilent les racines.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

Soient α, β et γ les racines complexes du polynôme $P = X^3 + X + 1$
1) Calculer $\alpha + \beta + \gamma$, puis $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, et enfin $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$
2) Calculer $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$ *(indice : utiliser la division euclidienne de X^4 par P)*

Correction :

1) *Il faut naturellement penser à une écriture de P qui fasse intervenir ses racines α, β et γ...*

$P = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$

Dans le cas général, il ne faut pas oublier, dans cette écriture, de mettre en facteur le coefficient dominant du polynôme, mais ici, il est égal à 1.

En développant : $P = (X - \alpha)\big(X^2 - (\beta + \gamma)X + \beta\gamma\big) = X^3 - (\alpha + \beta + \gamma)X^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)X - \alpha\beta\gamma$
En identifiant avec l'expression initiale $P = X^3 + X + 1$, on obtient :

$$\begin{cases} -(\alpha + \beta + \gamma) = 0 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 1 \\ -\alpha\beta\gamma = 1 \end{cases} \quad \text{Donc } \boxed{\alpha + \beta + \gamma = 0}$$

Maintenant, comment obtenir $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$?

$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)$
Donc (en utilisant les deux premières lignes du système) :
$0^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2 \times 1$. Et donc : $\boxed{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -2}$

Une somme de carrés strictement négative ? Rien de bien choquant dans le monde des complexes...

Reste maintenant à calculer $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$. Mais il n'y a pas de cube dans le système obtenu précédemment...

On sait que α, β et γ sont racines de P. Donc :

$$\begin{cases} \alpha^3 + \alpha + 1 = 0 \\ \beta^3 + \beta + 1 = 0 \\ \gamma^3 + \gamma + 1 = 0 \end{cases}$$

En sommant les trois lignes du système : $(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) + (\alpha + \beta + \gamma) + 3 = 0$
Sachant $\alpha + \beta + \gamma = 0$, on obtient : $\boxed{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -3}$

2) La division euclidienne de X^4 par $P = X^3 + X + 1$ donne : $X^4 = X(X^3 + X + 1) - X^2 - X$
En utilisant cette égalité pour α, β et γ, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha^4 = \alpha P(\alpha) - \alpha^2 - \alpha \;=\; -\alpha^2 - \alpha & \text{puisque } \alpha \text{ est racine de } P \\ \beta^4 = \beta P(\beta) - \beta^2 - \beta \;=\; -\beta^2 - \beta & \text{puisque } \beta \text{ est racine de } P \\ \gamma^4 = \gamma P(\gamma) - \gamma^2 - \gamma \;=\; -\gamma^2 - \gamma & \text{puisque } \gamma \text{ est racine de } P \end{cases}$$

En sommant les trois lignes de ce système, on obtient :
$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha + \beta + \gamma) = -(-2) - 0$

On en conclut : $\boxed{\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = 2}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com