Une suite au commissariat

Ayoub Hajlaoui

L'histoire a peu de charme. En voici l'abrégé :
Coincé par les gendarmes, le voleur est piégé.

Énoncé : (temps conseillé : 20 min)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + ...\frac{n}{n^2+n}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$

2) En déduire que (u_n) converge vers une limite que l'on précisera.

Correction :

1) u_n *est une somme de termes ne correspondant ni à une suite arithmétique, ni à une suite géométrique (seules sommes connues dans le programme de Terminale). Ça tombe bien, l'énoncé ne nous demande pas de la calculer, mais juste de l'encadrer...*

Encadrer directement la somme semble compliqué. Dès lors, pourquoi ne pas essayer d'encadrer chaque terme de la somme ?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \leq n$: $n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n$

Donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{1}{n^2+1} \geq \dfrac{1}{n^2+k} \geq \dfrac{1}{n^2+n}$

En appliquant une fonction croissante aux membres d'une inégalité, on conserve cette dernière. En appliquant une fonction décroissante aux membres d'une inégalité, on change le sens cette dernière.

Autrement dit : $\dfrac{1}{n^2+n} \leq \dfrac{1}{n^2+k} \leq \dfrac{1}{n^2+1}$ *(juste réécrite dans un sens plus " classique "...)*

En multipliant tous les membres de l'inégalité par n, qui est positif (ce qui ne change donc pas le sens de l'inégalité), on obtient :

$\dfrac{n}{n^2+n} \leq \dfrac{n}{n^2+k} \leq \dfrac{n}{n^2+1}$

Chaque terme de la somme u_n est donc entre $\dfrac{n}{n^2+n}$ et $\dfrac{n}{n^2+1}$

Cette somme comporte n termes (k va de 1 à n).

On peut donc en conclure : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \times \dfrac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq n \times \dfrac{n}{n^2+1}$

Si votre salaire mensuel varie entre 1500 *et* 2500 *euros, votre salaire annuel varie entre* 12×1500 *et* 12×2500 *euros... Dans cet exemple,* $n = 12$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : \dfrac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}}$

2) *Un encadrement à prouver puis une limite à calculer... La question est téléphonée, et vous devez vous en rendre compte même sans mon titre évident.*

Calculons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$

Le calcul direct de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+n}$ *donne une forme indéterminée. On factorise donc le numérateur (trivial ici) et le dénominateur par le terme dominant :*

$\dfrac{n^2}{n^2+n} = \dfrac{n^2}{n^2(1+\frac{1}{n})} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$ après simplification.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$, et enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

Autrement dit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+n} = 1}$

En appliquant la même technique, on obtient aussi : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1}$

D'après la question 1 : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$

Donc d'après le théorème des gendarmes *(voilà, c'est dit)* : $\boxed{(u_n) \text{ converge et } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com