Population de tortues

Ayoub Hajlaoui

Tortue couleur de pomme, ta bien clinquante armure
ne peut rien contre l'Homme et son cinglant murmure.

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure) *Bac S Polynésie, sept 2017*

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,3 \\ u_{n+1} &= 0,9u_n\left(1-u_n\right) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n et $1-u_n$ appartiennent à l'intervalle [0 ; 1].
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9u_n$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?
3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.
   On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.
   Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

Variables :	u est un réel
	n est un entier naturel
Traitement :	u prend la valeur $0,3$
	n prend la valeur 0
	Tant que ... faire :
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher ...

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite $\left(v_n\right)$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_{10} & = & 0,032 \\ v_{n+1} & = & 1,06 v_n\left(1-v_n\right) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel $n \geqslant 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.
2. On admet que, dans ce modèle, la suite $\left(v_n\right)$ est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite. Montrer que ℓ vérifie :

$$\ell=1,06 \ell(1-\ell).$$

3. La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?

Correction :

Partie A

1) Suivant ce modèle, le nombre en milliers de tortues au début de l'année 2001 (c'est-à-dire 2000 + 1) est : $u_1 = 0,9u_0(1-u_0) = 0,9 \times 0,3 \times (1-0,3) = 0,189$

$\boxed{\text{Suivant ce modèle, il y a donc 189 tortues au début de l'année 2001.}}$

Il serait dommage de partir de travers dès la première question, en oubliant que u_n correspond au nombre de tortues en milliers. Malgré tout, cet oubli peut être rattrapable si on se rend compte rapidement, en faisant $1-3000$ dans le calcul au lieu de $1-0,3$, qu'on obtient un u_1 négatif...

De même, $u_2 = 0,9u_1(1-u_1) = 0,9 \times 0,189 \times (1-0,189) = 0,1379511$

$\boxed{\text{Suivant ce modèle, il y a donc environ 138 tortues au début de l'année 2002.}}$ *L'approximation ne doit pas choquer, ce n'est qu'un modèle.*

2)a) *L'indication donnée en début de question (" on admet que... ") nous arrange beaucoup, et nous permet d'éviter la lourdeur d'un raisonnement par récurrence.*

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1$ et $0 \leq 1-u_n \leq 1$. Donc $0 \leq u_n(1-u_n) \leq 1$

Donc (en multipliant par $0,9 > 0$) : $0 \leq 0,9u_n(1-u_n) \leq 0,9$

On en conclut : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n+1} \leq 0,9u_n}$

2)b) *On a échappé à la récurrence à la question précédente. Pas sûr qu'on soit aussi chanceux sur celle-ci, étant donné le $0,9^n$, qui doit nous faire penser à la démonstration par récurrence de l'expression générale d'une suite géométrique (même si ici, il s'agit d'une inégalité et pas d'une égalité). Mais bon, ce n'est pas le genre de récurrence réputé pour sa difficulté.*

Montrons par récurrence sur n : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$

Initialisation : $u_0 = 0,3$ et $0,3 \times 0,9^0 = 0,3 \times 1 = 0,3$. On a donc bien : $0 \leq u_0 \leq 0,3 \times 0,9^n$

Hérédité : Supposons que pour un certain entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$. On sait alors d'après 2)a) : $0 \leq u_{n+1} \leq 0,9u_n$. Et $u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$ (hypothèse de récurrence).

Donc $0,9u_n \leq 0,9 \times 0,3 \times 0,9^n$. Autrement dit, $0,9u_n \leq 0,3 \times 0,9^{n+1}$

Donc $0 \leq u_{n+1} \leq 0,9u_n \leq 0,3 \times 0,9^{n+1}$.

Finalement, $0 \leq u_{n+1} \leq 0,3 \times 0,9^{n+1}$

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n}$

2)c) *On nous demande d'encadrer u_n pour ensuite nous demander la limite de (u_n). Si vous êtes assez entraîné, vous voyez venir la suite...*

$-1 < 0,9 < 1$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,3 \times 0,9^n = 0$

En utilisant l'encadrement obtenu en 2)b), d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

Cette population de tortues est donc en voie d'extinction.

Notez à quel point cette question est donnée. A supposer même que la 2)b) vous ait posé un souci, vous avez tout à fait le droit d'en admettre le résultat pour faire cette 2)c).

3) *Assurons-nous de comprendre le rôle de chacune des variables mises en jeu avant de compléter l'algorithme. La variable n, valant initialement 0, va être augmentée de 1 à chaque itération de la boucle " Tant que ". Quant à la variable u, elle joue le rôle de u_n, prenant initialement la valeur u_0 $(0,3)$ et étant mise à jour à chaque itération de la boucle " Tant que ".*

L'énoncé souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme affiche la dernière année avant laquelle il reste au moins 30 tortues. Autrement dit, il souhaite que l'algorithme affiche la première année pour laquelle le nombre de tortues passe strictement en-dessous de 30.

Tant que $u \geq 0,03$ faire : *(tant qu'on n'a pas encore ce qu'il faut)*
u prend la valeur $0,9 \times u \times (1-u)$ *(pour passer de u_n à u_{n+1})*
n prend la valeur $n+1$ *(pour que la variable n tienne compte de ce passage)*
Fin Tant que
Afficher n

Partie B

1) Suivant ce modèle, le nombre en milliers de tortues au début de l'année 2011 (c'est-à-dire 2000 + 11) est : $v_{11} = 1,06v_{10}(1-v_{10}) = 1,06 \times 0,032 \times (1-0,032) = 0,03283456$

$\boxed{\text{Suivant ce modèle, il y a donc environ 33 tortues au début de l'année 2011.}}$

De même, $v_{12} = 1,06v_{11}(1-v_{11}) = 0,0337$

$\boxed{\text{Suivant ce modèle, il y a donc environ 34 tortues au début de l'année 2012.}}$

2) $\forall n \geq 10,\ v_{n+1} = 1,06v_n(1-v_n)$
Étudions séparément les limites (lorsque n tend vers $+\infty$) des deux membres de cette égalité.
D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$
(v_n) et (v_{n+1}) ont même limite : c'est en effet la même suite à un décalage près
D'autre part, par opérations sur les limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,06v_n(1-v_n) = 1,06 \times l(1-l)$

La même quantité (cf égalité de départ) a pour limite l et $1,06 \times l(1-l)$.
Par unicité de la limite, on a donc : $\boxed{l = 1,06 \times l(1-l)}$

ATTENTION : ce raisonnement n'est bien sûr valable que lorsqu'on sait déjà que la suite (v_n) converge (ce qui est bien le cas ici). Hors de question de s'en servir si l'on ne sait pas que la suite converge (auquel cas on ne sait pas si l existe).

3) L'équation obtenue nous permet de calculer l.
On obtient alors : $l - 1,06 \times l(1-l) = 0$, c'est-à-dire : *(en factorisant par l)*
$l\big(1 - 1,06 \times (1-l)\big) = 0$. D'où : $l(1,06l - 0,06) = 0$
Donc $l = 0$ ou $1,06l - 0,06 = 0$
Donc $l = 0$ ou $l = \dfrac{0,06}{1,06} \simeq 0,057$
Or, d'après l'énoncé, on admet que (v_n) est croissante, avec $v_{10} = 0,032$
On ne peut donc pas avoir $l < 0,032$. Donc l ne peut pas valoir 0. Donc $l \simeq 0,057$.
Le nombre de tortues tend donc vers environ 57 (> 30).

$\boxed{\text{La population de tortues n'est plus en voie d'extinction.}}$

Ou sinon, en bien plus simple (idée d'un élève) : (v_n) est croissante avec $v_{10} > 0,03$ ". Le nombre de tortues est supérieur à 30 (le seuil) en 2010, et il est croissant. Les tortues ne sont donc pas menacées d'extinction.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com