Quel est ce polynôme ?

Ayoub Hajlaoui

Si vous manquez d'infos, peut-être l'énoncé
Est-il tronqué ou faux. Faut-il le dénoncer ?

Énoncé :

Soit f une fonction polynôme du troisième degré, dont le tableau de variations sur $\mathbb{R}$ est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f	$\nearrow$	2	$\searrow$ -4	$\nearrow$

f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c et d sont quatre réels.
Déterminer f.

Correction :

Déterminer f, c'est déterminer a, b, c et d. J'ai donc quatre inconnues à déterminer. Quatre équations indépendantes ne seraient donc pas de refus.

A première vue, je ne le sens pas très bien... Je ne vois, grâce au tableau de variations qui m'est donné, que deux équations...

D'après le tableau de variations, $f(0) = 2$ et $f(2) = -4$.

Autrement dit : $\begin{cases} a\times 0^3 + b\times 0^2 + c\times 0 + d = 2 \\ a\times 2^3 + b\times 2^2 + c\times 2 + d = -4 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = -4 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} d = 2 \\ 8a + 4b + 2c = -6 \end{cases}$. On a donc $\boxed{d = 2}$.

Bon, ce n'est déjà pas si mal...J'ai au moins trouvé d, et on a une équation entre a, b et c. Mais il nous en faudrait deux autres. L'énoncé serait-il incomplet, ou une information cachée m'échapperait-elle ?

Voyons voir... Les images de 0 et 2 par f seraient-elles les seules informations numériques exactes dont nous disposions ? Pas sûr...

f change de variations en $x = 0$ et en $x = 2$ (autrement dit, elle admet des extrema locaux en 0 et en 2). De plus, f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc $f'(0) = 0$ et $f'(2) = 0$.

Eh oui, la voilà, l'information " cachée ", qu'il est en tous cas difficile de voir dans le feu de l'action.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, et on sait $f'(0) = 0$ et $f'(2) = 0$. D'où :

$\begin{cases} 3a\times 0^2 + 2b\times 0 + c = 0 \\ 3a\times 2^2 + 2b\times 2 + c = 0 \end{cases}$, c'est-à-dire : $\begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases}$ Donc $\boxed{c = 0}$.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

En rajoutant l'équation obtenue précédemment, on obtient : $\left\{\begin{array}{rcl} 12a+4b & = & 0 \\ 8a+4b+2\times 0 & = & -6 \end{array}\right.$

Autrement dit : $\left\{\begin{array}{rcll} 12a+4b & = & 0 & (L_1) \\ 8a+4b & = & -6 & (L_2) \end{array}\right.$

En remplaçant la première ligne par $(L_1)-(L_2)$, on obtient :
$\left\{\begin{array}{rcl} 4a & = & 6 \\ 8a+4b & = & -6 \end{array}\right.$

Donc $\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{3}{2} \\ 4b & = & -6-8\times\dfrac{3}{2}=-18 \end{array}\right.$

Finalement $\boxed{a=\dfrac{3}{2}}$ et $\boxed{b=-\dfrac{9}{2}}$

En conclusion, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x)=\dfrac{3}{2}x^3-\dfrac{9}{2}x^2+2}$

Si la calculatrice est autorisée et s'il reste du temps, penser à tracer la courbe de cette fonction à la calculatrice pour s'assurer qu'elle correspond bien au tableau de variations de l'énoncé...