Suite construite au hasard

Ayoub Hajlaoui

Souliers et cape au vent dans les brumes fortuites,
d'un tirage au suivant, construisons notre suite.

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure) *D'après Bac S Antilles Guyane, sept 1997*

On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3 contenant chacune 2 boules indiscernables.

Dans U_1 une boule est marquée G, l'autre est marquée A ; dans U_2 une boule est marquée 3, l'autre est marquée 5 ; dans U_3 une boule est marquée $\frac{1}{2}$, l'autre est marquée 2.

Une épreuve E consiste à tirer au hasard une boule dans chaque urne. On définit une suite u de la façon suivante :

si la boule tirée dans U_1 est marquée A, la suite est arithmétique, si elle est marquée G, la suite est géométrique ; la boule tirée dans U_2 désigne le premier terme u_0 et la boule tirée dans U_3 désigne la raison.

1. Calculer la probabilité d'avoir :
   (a) une suite u arithmétique ;
   (b) une suite u convergente ;
   (c) une suite u telle que u_4 soit un nombre entier pair.
2. Calculer la probabilité d'avoir une suite u qui ne soit pas convergente sachant qu'elle est géométrique.
3. Un joueur tire une boule dans chaque urne et définit ainsi une suite numérique u :
   — si u est géométrique, il gagne 5 euros ;
   — si u est arithmétique et $u_4 \leqslant 7$, il perd 4 euros ;
   — si u est arithmétique et $u_4 > 7$, il perd 6 euros.
   Soit X la variable aléatoire égale au gain (algébrique) du joueur :
   — donner la loi de probabilité de X ;
   — calculer l'espérance de X.

Considérations générales :

Si on ne voit pas qu'il y a indépendance entre les tirages de chaque urne, on risque de beaucoup, beaucoup, se compliquer la vie...

Correction :

1) *Ce genre d'exercice agaçant où l'énoncé ne donne pas lui-même les noms des événements, et nous laisse donc le soin de le faire...*

Appelons A (respectivement G) l'événement : " la boule tirée de l'urne U_1 est marquée A (respectivement G)."

Appelons B_3 (respectivement B_5) l'événement " la boule tirée de l'urne U_2 est marquée 3 (respectivement 5). "

Appelons $\boldsymbol{C}_{\frac{1}{2}}$ (respectivement $\boldsymbol{C}_2$) l'événement " la boule tirée de l'urne $\boldsymbol{U}_3$ est marquée $\frac{1}{2}$ (respectivement 2). "

J'imagine que les appellations $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{G}$ *n'ont choqué personne. Mais pourquoi toutes ces précautions pour les autres ? Je ne pouvais me permettre d'appeler* 3, 5, $\frac{1}{2}$ *et* 2 *de tels événements, pour ne pas avoir à écrire d'horreurs du genre* $\boldsymbol{P}(3)$ *ou* $\boldsymbol{P}(\frac{1}{2})$*...*

a) La suite obtenue est arithmétique si et seulement si la boule tirée dans $\boldsymbol{U}_1$ est marquée $\boldsymbol{A}$. L'énoncé nous demande donc de calculer *(c'est un bien grand mot)* $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$. Les deux boules de l'urne $\boldsymbol{U}_1$ sont indiscernables. On a donc $\boxed{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}}$.

b) *Un arbre n'est pas nécessaire. Les deux premières branches mèneraient vers* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{G}$*. Ensuite, de* $\boldsymbol{A}$ *partiraient deux branches menant vers* $\boldsymbol{B}_3$ *et* $\boldsymbol{B}_5$*. De même en partant de* $\boldsymbol{G}$*. Enfin, de chacun des nœuds* $\boldsymbol{B}_3$ *et* $\boldsymbol{B}_5$ *partent des branches menant vers* $\boldsymbol{C}_{\frac{1}{2}}$ *et* $\boldsymbol{C}_2$ *(oui, j'ai la flemme de le faire).*

Mais les résultats du tirage de chaque urne sont indépendants (il n'y a aucune raison que la boule tirée de $\boldsymbol{U}_1$ *ait une quelconque influence sur le tirage dans* $\boldsymbol{U}_2$ *etc...), ce qui limite fortement l'utilité d'un tel arbre. Les branches de l'arbre porteraient toutes la probabilité* $\frac{1}{2}$*.*

Rappelons que le terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 est $u_n = u_0 + n \times r$. Donc Si $r \neq 0$, $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de r.

Une suite arithmétique est donc convergente si et seulement si sa raison est 0 (raison qui n'est pas proposée ici).

Dans notre cas, il n'y a donc pas moyen d'obtenir une suite arithmétique si la boule tirée de $\boldsymbol{U}_1$ est $\boldsymbol{A}$.

Si la suite est géométrique (et vu que le premier terme ne peut pas être nul vu les choix qui nous sont donnés), elle converge si et seulement si sa raison est dans $]-1\ ;\ 1[$. Ici, elle converge donc si et seulement si sa raison est $\frac{1}{2}$.

La probabilité que l'énoncé nous demande de calculer est donc $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{G} \cap \boldsymbol{C}_{\frac{1}{2}})$.

Les événements $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{C}_{\frac{1}{2}}$ sont indépendants, donc $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{G} \cap \boldsymbol{C}_{\frac{1}{2}}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{G}) \times \boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$.

Finalement, $\boxed{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{G} \cap \boldsymbol{C}_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{4}}$

c) <u>Si (u_n) est arithmétique de raison 2</u> : $u_4 = u_0 + 2 \times 4 = u_0 + 8$, avec 8 pair. u_4 a donc la même parité que u_0. Or, les deux seuls choix possibles pour u_0 sont 3 et 5. Donc <u>u_4 est impair</u>.

<u>Si (u_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$</u> : $u_4 = u_0 + \frac{1}{2} \times 4 = u_0 + 2$, avec 2 pair. u_4 a donc, dans ce cas aussi, la même parité que u_0. Or, les deux seuls choix possibles pour u_0 sont 3 et 5. Donc <u>u_4 est impair</u>.

<u>Si (u_n) est géométrique de raison 2</u> : $u_4 = u_0 \times 2^4 = 2 \times 8u_0$ avec $8u_0$ entier, donc <u>u_4 est pair</u>.

<u>Si (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$</u> : $u_4 = u_0 \times (\frac{1}{2})^4 = \frac{u_0}{16}$, ce qui ne donne jamais un nombre entier (et donc pas un entier pair) avec les choix de u_0 fournis dans l'urne $\boldsymbol{U}_2$. Donc <u>u_4 n'est pas un entier pair</u>.

La probabilité demandée est donc $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{G} \cap \boldsymbol{C}_2) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{G}) \times \boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}_2)$ (par indépendance) $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

Donc $\boxed{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{G} \cap \boldsymbol{C}_2) = \frac{1}{4}}$

2) Sachant que la suite est géométrique (c'est-à-dire sachant l'événement G), elle est ici convergente si et seulement si sa raison est $\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire si et seulement si l'événement $C_{\frac{1}{2}}$ se produit), et donc non convergente si et seulement si sa raison est 2.

L'énoncé nous demande donc de calculer $P_G(C_2)$.

Les événements G et C_2 étant indépendants, $P_G(C_2) = P(C_2)$ (la condition " sachant G " n'influence pas la probabilité de C_2)

Donc $\boxed{P_G(C_2) = \frac{1}{2}}$.

3) Les valeurs possibles que peut prendre X sont -6, -4 et 5 *(une perte correspond à un gain algébrique négatif).*

$P(X = 5) = P(G)$ donc $\boxed{P(X = 5) = \frac{1}{2}}$

De plus, comme vu précédemment (en 1-c) :
si u est arithmétique de raison 2, $u_4 = u_0 + 8 \geq 8 > 7$
et si u est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$, $u_4 = u_0 + 2 \leq 5 + 2$. Donc $u_4 \leq 7$.

On en conclut :
$P(X = -6) = P(A \cap C_2)$ donc $P(X = -6) = P(A) \times P(C_2)$ (par indépendance).

Donc $\boxed{P(X = -6) = \frac{1}{4}}$

Enfin, $P(X = -4) = P(A \cap C_{\frac{1}{2}}) = P(A) \times P(C_{\frac{1}{2}})$. Donc $\boxed{P(X = -4) = \frac{1}{4}}$.

On n'avait pas besoin de calculer cette dernière probabilité, et on aurait pu se contenter de dire $P(X = -4) = 1 - P(X = -6) - P(X = 5)$ pour trouver le résultat. Mais ne pas le faire (vu que le calcul direct ne coûte pas grand-chose) et pouvoir vérifier que la somme des probabilités fait 1 est plus rassurant.

La loi de X est donc donnée par le tableau suivant :

x_i	-6	-4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Soit $E(X)$ l'espérance de X.
$E(X) = -6 \times \frac{1}{4} - 4 \times \frac{1}{4} + 5 \times \frac{1}{2}$. Donc $\boxed{E(X) = 0}$