Encadrement de e

Ayoub Hajlaoui

L'élève ingénument demande à quoi tu sers,
Étrange encadrement dont l'étau se resserre

Énoncé : (temps conseillé : 25 minutes)

1) Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$. *Indication : on pourra s'aider d'une étude de fonction.*

2) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$

Correction :

1) *S'aider d'une étude de fonction ? Quelle serait la fonction en question, et quel serait l'objet de ladite étude ?*

Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$ revient à montrer que pour tout $x > -1$, $x - \ln(1+x) \geq 0$

Soit f la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$, $f(x) = x - \ln(1+x)$. Montrons donc que pour tout $x > -1$, $f(x) \geq 0$.

Cela reviendrait au même de montrer que la fonction g définie par $g(x) = ln(1+x) - x$ est négative.

Étudions les variations de f sur $]-1\ ;\ +\infty[$ (en espérant par exemple montrer qu'elle a un minimum positif, de telle sorte qu'elle ne puisse jamais être négative).

$x \mapsto 1+x$ est dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty[$ (car polynôme). Pour tout $x \in\ ]-1\ ;\ +\infty[$:
$1+x \in\ ]0\ ;\ +\infty[$, intervalle sur lequel la fonction ln est dérivable.
La fonction f est donc dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par composition de fonctions dérivables.

Lorsqu'on ne demande pas explicitement de justifier la dérivabilité, une phrase rapide du style " dérivable par composition de fonctions dérivables " peut passer. Mais ce n'est pas plus mal de vous rappeler comment le démontrer plus proprement au cas où ça vous est explicitement demandé.

$\forall x > -1,\ f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1+x-1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$ avec $1+x > 0$ (car $x > -1$)
Donc $f'(x)$ est du signe de x. D'où le tableau suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	||	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$f(0) = 0 - \ln(1+0) = 0$.
f a donc pour minimum 0 sur $]-1\ ;\ +\infty[$. Donc : $\forall x > -1,\ f(x) \geq 0$.
Autrement dit : $\forall x > -1,\ x - \ln(1+x) \geq 0$. En conclusion : $\boxed{\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

2) *En déduire ?? Quel rapport avec la question précédente ? Déjà, pour qu'il y ait un rapport, il faudrait faire apparaître du ln... Et ça tombe bien, si j'applique ln à de la puissance... Rappelons que pour tout $a > 0$ et pour tout entier relatif k : $ln(a^k) = kln(a)$*

$$\forall n \geq 2,\ \ln\Big((1+\frac{1}{n})^n\Big) = n\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)$$

Ah, peut-être que là, le rapport avec la question 1 est plus évident... A la question 1, on a montré une certaine inégalité POUR TOUT réel plus grand que -1. On aurait très envie d'appliquer cette inégalité en remplaçant x par $\frac{1}{n}$, du coup. A-t-on le droit ? Bien sûr, en vérifiant juste que $\frac{1}{n}$ est plus grand que 1.

Or, pour $n \geq 2$, $\dfrac{1}{n} > 0$ donc $\dfrac{1}{n} > -1$. On peut donc appliquer l'inégalité prouvée en 1) en remplaçant x par $\dfrac{1}{n}$.

Donc $\ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big) \leq \dfrac{1}{n}$. Et donc (en multipliant par $n \geq 0$) : $n\ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big) \leq n \times \dfrac{1}{n} = 1$

On a montré : $\forall n \geq 2,\ \ln\Big((1+\dfrac{1}{n})^n\Big) \leq 1$

Oui mais dans l'inégalité à démontrer, il n'y a pas de ln. Pas de souci, je connais un antidote assez simple...

Par croissance de la fonction exponentielle, on a donc : $\forall n \geq 2,\ \exp\Big(\ln\Big((1+\dfrac{1}{n})^n\Big)\Big) \leq e^1$

Autrement dit : $\boxed{\forall n \geq 2,\ (1+\dfrac{1}{n})^n \leq e}$

Reste à prouver la seconde inégalité de l'encadrement demandé...

$$\forall n \geq 2, \ln\Big((1-\frac{1}{n})^{-n}\Big) = -n\ln\Big(1-\frac{1}{n}\Big)$$

Cette fois-ci, si on veut appliquer l'inégalité de 1), il faudrait remplacer x par $-\frac{1}{n}$...

$\forall n \geq 2,\ \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{2}$ par décroissance de la fonction inverse sur $]0\ ;\ +\infty[$. Donc $-\dfrac{1}{n} \geq -\dfrac{1}{2}$.

Et $-\dfrac{1}{2} > -1$. Donc $-\dfrac{1}{n} > -1$. On peut donc appliquer l'inégalité prouvée en 1) en remplaçant x par $-\dfrac{1}{n}$.

Donc $\ln\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big) \leq -\dfrac{1}{n}$. Et donc (en multipliant par $-n \leq 0$) : $-n\ln\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big) \geq -n(-\dfrac{1}{n}) = 1$

On a montré : $\forall n \geq 2,\ \ln\Big((1-\dfrac{1}{n})^{-n}\Big) \geq 1$

Par croissance de la fonction exponentielle, on a donc : $\forall n \geq 2,\ \exp\Big(\ln\Big((1-\dfrac{1}{n})^{-n}\Big)\Big) \geq e^1$

Autrement dit : $\boxed{\forall n \geq 2,\ (1-\dfrac{1}{n})^{-n} \geq e}$

En conclusion : $\boxed{\forall n \geq 2,\ \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n \leq e \leq \Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)^{-n}}$