Étude de fonction et de suite

Ayoub Hajlaoui

La pensée cristalline et le courage aidant,
Aiguisez vos canines, sans vous casser les dents.

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure) *D'après EM Lyon 2015*

Partie I : étude de fonction

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2e^x - 1$

1. Étudier les variations de g. Calculer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. Démontrer que $g(x)$ tend vers -1 lorsque x tend vers $-\infty$.
3. (a) Montrer que l'équation $e^x = \dfrac{1}{x^2}$ admet une unique solution sur $]0\ ;\ +\infty[$. On notera α cette solution.
   (b) Justifier que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$

Partie II : étude de suite

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3e^x$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1$
2. Établir que la suite (u_n) est croissante.
3. Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Correction :

Partie I :

1) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2 + x)$
$e^x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x(x + 2)$. On peut donc dresser le tableau de signe de g' et le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

L'énoncé demandant à part la limite de g en $+\infty$, il ne demande a priori pas le tableau de variations complet.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Donc par opérations sur les limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

2) *Lorsque x tend vers $-\infty$, x^2 tend vers $+\infty$ et e^x tend vers 0. Leur produit x^2e^x donne donc une forme indéterminée... On a l'intuition que c'est e^x qui va " vaincre " et que leur produit va donc tendre vers 0, mais il faut le démontrer rigoureusement...*

Par croissance comparée, on sait : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (car $= \lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{X}{e^X}$ en posant $X = -x$)

Mais ici, on n'a pas xe^x.. On a x^2e^x. A une époque, il était clairement au programme de TS que pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^ne^x = 0$. Mais aujourd'hui, ce n'est plus si clair..

Astuce pour y parvenir : remarquer $x^2e^x = (xe^{\frac{x}{2}})^2$. De cette manière, le x^2 a perdu son carré, et le x en exposant de l'exponentielle a été " juste " divisé par 2...

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2e^x = (xe^{\frac{x}{2}})^2 = \left(2 \times \dfrac{x}{2} \times e^{\frac{x}{2}}\right)^2$

Maintenant, posons $X = \dfrac{x}{2}$. Remarquons $\lim\limits_{x\to-\infty} X = -\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2 \times \dfrac{x}{2} \times e^{\frac{x}{2}}\right)^2 = \lim\limits_{X\to-\infty} \left(2Xe^X\right)^2 = 0$ par croissance comparée et opérations sur les limites.

On a montré : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$.

On en conclut donc, par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1}$

Pour l'anecdote, pour prouver en général $\lim\limits_{x\to-\infty} x^ne^x = 0$, on écrit :
$x^ne^x = \left(xe^{\frac{x}{n}}\right)^n = (n \times \dfrac{x}{n} \times e^{\frac{x}{n}})^n$...

3)a) *Quel rapport avec tout ce qui précède ? Ce serait bien d'en trouver un...*

$\forall x \in]0\ ;\ +\infty[,\ e^x = \dfrac{1}{x^2} \iff x^2e^x = 1 \iff x^2e^x - 1 = 0$

L'équation $e^x = \dfrac{1}{x^2}$ est donc équivalente à l'équation $\underline{g(x) = 0}$. Les solutions de l'une sont donc les solutions de l'autre.

Voilà qui est plus sympa. Le corollaire du TVI (que vous voyez clairement se profiler, j'espère...) va pouvoir être utilisé sur une fonction que j'ai déjà étudiée.

La fonction $\underline{g \text{ est continue}}$ car dérivable (cf question 1) $\underline{\text{sur }]0\ ;\ +\infty[}$.
$\underline{g \text{ est strictement croissante sur }]0\ ;\ +\infty[}$.
Enfin, $\lim\limits_{x\to0} g(x) = g(0) = \underline{-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \underline{+\infty}$ (cf question 1) et $\underline{0 \in]-1\ ;\ +\infty[}$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Autrement dit, $\boxed{\text{l'équation } e^x = \dfrac{1}{x^2} \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur }]0\ ;\ +\infty[.}$

J'abandonne toute originalité sur la conclusion et je me contente de reprendre la formulation de l'énoncé, afin d'éviter toute erreur inutile de rédaction.

3)b) $g(\frac{1}{2}) = (\dfrac{1}{2})^2e^{\frac{1}{2}} - 1 = \dfrac{1}{4} \times e^{\frac{1}{2}} - 1 < \dfrac{1}{4} \times e^1 - 1 < 0$ (car $e < 4$)
$g(1) = 1^2 \times e^1 - 1 = e - 1 > 0$
On a donc : $g(\frac{1}{2}) < 0 < g(1)$. Autrement dit : $g(\frac{1}{2}) < g(\alpha) < g(1)$

Par stricte croissance de g sur $]0\ ;\ +\infty[$, on en conclut : $\boxed{\dfrac{1}{2} < \alpha < 1}$

Partie II :

1) *Pas d'idée particulière + propriété à montrer* $\forall n \in \ldots$ *+ suite définie par une relation de passage entre* u_n *et* u_{n+1} *? Je vous prescris un comprimé de récurrence.*

Montrons par récurrence sur n : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1$

Initialisation : $u_0 = 1$ donc $u_0 \geq 1$

Hérédité : Supposons que pour un certain entier naturel n, $u_n \geq 1$, et montrons $u_{n+1} \geq 1$.
$u_{n+1} = f(u_n) = (u_n)^3 e^{u_n}$ avec $u_n^3 \geq 1^3$ par croissance de la fonction cube et $e^{u_n} \geq e^1$ par croissance de la fonction exponentielle. Donc $(u_n)^3 e^{u_n} \geq 1$, c'est-à-dire : $u_{n+1} \geq 1$.
On a montré : $u_n \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} \geq 1$

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure :
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1}$

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = (u_n)^3 e^{u_n} - u_n$

Jusqu'ici, j'étais en pilote automatique. On me demande d'étudier les variations de la suite : il est assez naturel que je m'intéresse à $u_{n+1} - u_n$*. Mais maintenant, comment étudier le signe de cette chose ?*

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = u_n(u_n^2 e^{u_n} - 1)$. *Euh.. En quoi est-ce plus joli ? Ouvrez les yeux !*
On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = u_n \times g(u_n)$ *Et oui, la partie I...*

Par ailleurs, on a montré (question précédente) que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$. Donc $u_n > 0$, et donc $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $g(u_n)$.
g étant strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ (partie I question 1), on a $g(u_n) > g(1)$ avec $g(1) > 0$ (calculé en I-3b). Donc $g(u_n) > 0$.
On en conclut : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n > 0$.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc strictement croissante.}}$

3) *Question difficile et piégeuse. On ne vous dit à aucun moment que* (u_n) *converge (la limite peut être infinie).*
Vu qu'on a montré la croissance de la suite, on est tentés de chercher à voir si elle ne serait pas majorée... Mais on ne voit pas trop comment. En fait, elle ne l'est pas... En général, n'hésitez pas à utiliser la calculatrice non pas comme preuve, mais pour vous donner une idée de ce qu'il faut démontrer.
(u_n) est une suite croissante. Donc :
- soit elle converge vers une certaine limite l (dans le cas où elle est majorée), avec $l \geq 1$ (puisque pour tout n, $u_n \geq 1$)
- soit elle tend vers $+\infty$

Si (u_n) converge vers une certaine limite l, on a alors $f(l) = l$.
Autrement dit : $l^3 e^l = l$, c'est-à-dire : $l^3 e^l - l = 0$ ou encore $l(l^2 e^l - 1) = 0$.
On a donc $lg(l) = 0$, avec $l \neq 0$ (car $l \geq 1$). Donc $g(l) = 0$.
Or, par croissance de g sur $[0\ ;\ +\infty[$, $g(l) \geq g(1) > 0$. Donc on ne peut pas avoir $g(l) = 0$.
Donc (u_n) ne peut pas converger.

Par élimination, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$