Fonction logarithmique à paramètre

Ayoub Hajlaoui

Afin de rehausser leurs attentes finales,
Donnons du HEC aux jeunes Terminale

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure) *D'après HEC 2001 (option économique)*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{2}\right)$.

1. (a) Étudier les variations de f.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
   (c) Montrer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x + \ln(2) = 0$
   Donner une interprétation graphique de ce résultat.

2. Soit a un réel vérifiant $0 < a < 1$ et soit φ_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_a(x) = f(x) - ax$
   (a) Étudier les variations de la fonction φ_a. Montrer que la fonction φ_a atteint un minimum en un unique point x_a de $\mathbb{R}$ dont on donnera l'expression en fonction de a. Préciser les valeurs de $\varphi_a(0)$ et de $\varphi_a'(0)$.
   (b) Étudier le signe de x_a suivant les valeurs de a.
   (c) Montrer que, pour tout réel $a \neq \dfrac{1}{2}$, on a : $e^{\varphi_a(x_a)} < 1$

Correction :

1)a) *Dans ce genre de situation, passer par la dérivée n'est pas nécessaire...*

La fonction $x \mapsto \dfrac{e^x+1}{2}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $]0\ ;\ +\infty[$. Sur ce dernier intervalle, la fonction ln est strictement croissante. Par composition, la fonction f est donc strictement croissante.

Sinon, pour ceux qui veulent dériver à tout prix :
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables.
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln(e^x+1) - \ln(2)$ (mini astuce pour que la dérivée soit plus simple à exprimer).

Rappelons que l'expression $\ln(u(x))$ *donne, après dérivation,* $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. *Plus généralement, dériver* $v(u(x))$ *donne* $u'(x) \times v'(u(x))$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$. *Attention, pas d'horreur du genre :* $\ln(2)$ *qui deviendrait* $\dfrac{1}{2}$ *après dérivation...* $\ln(2)$ *est une constante.*

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$. D'où : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$. $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc strictement croissante}}$ sur $\mathbb{R}$.

1)b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Par opérations sur les limites, on a donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Enfin, par composition (par continuité de la fonction ln en $\dfrac{1}{2}$) : $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(\dfrac{e^x+1}{2}) = \ln(\dfrac{1}{2})$

Autrement dit : $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\ln(2)}$

1)c) $\forall x \geq 0,\ f(x) - x + \ln(2) = \ln(e^x+1) - \ln(2) - x + \ln(2) = \ln(e^x+1) - x$

À ce stade du calcul, on obtient malheureusement une forme indéterminée. Comment nous en sortir ? Nous savons que $\ln(a) - \ln(b) = \ln(\frac{a}{b})$. *Ici, nous voyons bien une différence, mais le second terme ne porte pas de* ln... *Et alors ? Faisons-le apparaître !*

$\forall x \geq 0,\ f(x) - x + \ln(2) = \ln(e^x+1) - x = \ln(e^x+1) - \ln(e^x) = \ln(\frac{e^x+1}{e^x}) = \ln(\frac{e^x}{e^x} + \frac{1}{e^x})$

Donc $f(x) - x + \ln(2) = \ln(1+e^{-x})$. *N'est-ce pas beaucoup mieux pour calculer la limite ?*

$\lim_{x\to+\infty} 1 + e^{-x} = 1$. Donc, par composition (ln étant continue en 1) :

$\lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = \ln(1) = 0.$ Donc : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) - x + \ln(2) = 0}$

Autrement dit : $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x - \ln(2)) = 0$

On peut donc en conclure que la courbe de f admet pour asymptote (oblique) en $+\infty$ la droite d'équation $y = x - \ln(2)$.

2)a) φ_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_a'(x) = f'(x) - a = \frac{e^x}{e^x+1} - a = \frac{e^x - ae^x - a}{e^x+1} = \frac{(1-a)e^x - a}{e^x+1}$

$e^x + 1 > 0$ donc φ_a' est du signe de $(1-a)e^x - a$. Résolvons donc l'inéquation $(1-a)e^x - a \geq 0$:

$(1-a)e^x - a \geq 0 \Leftrightarrow (1-a)e^x \geq a \Leftrightarrow e^x \geq \frac{a}{1-a}$ car $1 - a > 0$

$\Leftrightarrow x \geq \ln(\frac{a}{1-a})$ car la fonction ln est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

On obtient donc le tableau de signe suivant pour φ_a', et donc le tableau de variation de φ_a :

x	$-\infty$		x_a		$+\infty$
$\varphi_a'(x)$		$-$	0	$+$	
φ_a		$\searrow$		$\nearrow$	

$\boxed{\varphi_a \text{ atteint donc un minimum en un unique point } x_a \text{ avec } x_a = \ln(\frac{a}{1-a})}$

$\varphi_a(0) = \ln(\frac{e^0+1}{2}) - a \times 0$. Donc $\boxed{\varphi_a(0) = 0}$

$\varphi_a'(0) = \frac{(1-a)e^0 - a}{e^0+1} = \frac{1-2a}{2}$. Donc $\boxed{\varphi_a'(0) = \frac{1}{2} - a}$

2)b) Résolvons sur $]0\ ;\ 1[$ l'inéquation $x_a \geq 0$:

$\ln(\frac{a}{1-a}) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(\frac{a}{1-a}) \geq \ln(1) \Leftrightarrow \frac{a}{1-a} \geq 1$ (par croissance de la fonction exponentielle) $\Leftrightarrow a \geq 1 - a$ (car $1 - a > 0$) $\Leftrightarrow 2a \geq 1 \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{2}$

Donc : $\boxed{\text{pour } a \in]0\ ;\ \frac{1}{2}[,\ x_a < 0 ;\ \text{pour } a \in]\frac{1}{2}\ ;\ 1[,\ x_a > 0 ;\ \text{et pour } a = \frac{1}{2},\ x_a = 0.}$

2)c) *Si on n'a pas l'idée d'utiliser le tableau de variation utilisé précédemment, on risque de calculer longtemps des horreurs...*

φ_a atteint son minumum en x_a. Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_a(x_a) \leq \varphi_a(x)$.

En particulier, $\varphi_a(x_a) \leq \varphi_a(0) = 0$. Cette inégalité est stricte pour tout $a \neq \frac{1}{2}$ (car alors, $x_a \neq 0$ d'après la question précédente). Donc, par stricte croissance de la fonction exponentielle :

$\forall a \in]0\ ;\ 1[- \{\frac{1}{2}\},\quad e^{\varphi_a(x_a)} < e^0$. D'où : $\boxed{e^{\varphi_a(x_a)} < 1}$