# Arctan sans la nommer

Ayoub Hajlaoui

*De sa plume en titane, il s'était adonné*
*à l'étude d'arctan, sans même la nommer.*

**Énoncé :** (temps conseillé : 2 heures)

*On rappelle la formule générale permettant de dériver une composée de fonctions (sous réserve de dérivabilité) : si* $w(x) = v(u(x))$, *alors* $w'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ 1]$ telle que :
$f(0) = 0$ et $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout $x$ de $[0\ ;\ 1]$.

**Partie A**

1. Déterminer le sens de variation de $f$ sur $[0\ ;\ 1]$.
2. Soit $g$ la fonction définie sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = f(\tan(x))$. *On rappelle :* $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
   (a) Justifier que la fonction tan est dérivable sur $]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[$, et exprimer sa dérivée $\tan'$ de deux façons différentes : une en fonction de cos, et une autre en fonction de tan
   (b) Calculer les limites de la fonction tan aux bornes de l'intervalle précédent.
   (c) Dresser le tableau de variation complet de la fonction tan sur $[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}]$
   (d) Justifier que $g$ est dérivable sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$, puis que, pour tout $x$ de $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$, $g'(x) = 1$.
   (e) Montrer que, pour tout $x$ de $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x$, et en déduire que $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$.
3. Montrer que, pour tout $x$ de $[0\ ;\ 1]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

**Partie B**

Soit $(I_n)$ la suite définie par $I_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et, pour tout entier naturel $n$ non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables (de dérivées continues) sur $[a; b]$. Montrer l'égalité suivante : $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$
   Cette égalité s'appelle une intégration par parties.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, $I_0 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln(2)$.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, $I_n \geqslant 0$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, $I_n \leqslant \dfrac{\pi}{4(n+1)}$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(I_n)$.

**Correction :**

**Partie A**

1) $\forall x \in [0\ ;\ 1],\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} > 0$. $\boxed{f \text{ est donc strictement croissante sur } [0\ ;\ 1].}$

2)a) Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[$. De plus, la fonction cos ne s'annule pas sur cet intervalle. Par quotient de fonctions dérivables (avec dénominateur non nul), $\boxed{\text{la fonction tan est donc dérivable sur } ]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[.}$

$\forall x \in ]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[,\ \tan'(x) = \dfrac{\sin'(x)\times\cos(x) - \sin(x)\times\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$

Autrement dit : $\boxed{\forall x \in ]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[,\ \tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}}$

*Maintenant, comment exprimer tan' en fonction de tan ?*

$\forall x \in ]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[,\ \tan'(x) = \dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2$

Autrement dit : $\boxed{\forall x \in ]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[,\ \tan'(x) = 1+\tan^2(x)}$

2)b) $\boxed{\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \sin(x) = \sin(-\tfrac{\pi}{2}) = -1}$ (la fonction sinus étant continue et notamment en $-\dfrac{\pi}{2}$)

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \cos(x) = \cos(-\tfrac{\pi}{2}) = 0$ (la fonction cosinus étant continue et notamment en $-\dfrac{\pi}{2}$)

*Oui mais en calcul de limite, " $\dfrac{-1}{0}$ "... Il nous faut le signe du* $0$

Ici, on s'intéresse en fait à la limite de tan en $(-\dfrac{\pi}{2})^+$ *(c'est-à-dire quand $x$ tend vers $-\dfrac{\pi}{2}$ en étant plus grand que $-\dfrac{\pi}{2}$)*

$\boxed{\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} \cos(x) = 0^+}$ (la fonction cosinus étant positive sur $]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[$)

Par quotient de limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} \tan(x) = -\infty}$

De même : $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin(x) = \sin(\tfrac{\pi}{2}) = 1}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \cos(x) = 0^+}$.

Par quotient de limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \tan(x) = +\infty}$

2)c) D'après 2)a) : $\forall x \in ]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[,\ \tan'(x) = 1+\tan^2(x) \geq 1 > 0$

La fonction tan est donc strictement croissante sur $]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[$, et a fortiori sur $[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}]$.

De plus, $\tan(0) = \dfrac{\sin(0)}{\cos(0)} = \dfrac{0}{1} = 0$ et $\tan(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

On obtient donc le tableau de variation suivant :

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ |
|---|---|---|
| tan | $0$ ↗ | $1$ |

2)d) $\forall x \in [0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}],\ g(x) = f(\tan(x))$

tan est dérivable sur $[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}]$. De plus, pour tout $x \in [0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}]$, $\tan(x) \in [0\ ;\ 1]$ (d'après le tableau de variations), et la fonction $f$ est dérivable sur $[0\ ;\ 1]$.

Par composée de fonctions dérivables, $\boxed{g \text{ est donc dérivable sur } [0\ ;\ \frac{\pi}{4}].}$

$\forall x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{4}],\ g'(x) = \tan'(x) \times f'(\tan(x))$ *(la formule était rappelée par l'énoncé)*

$\forall x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{4}],\ g'(x) = \tan'(x) \times \dfrac{1}{1+\tan^2(x)}$ *(on a juste remplacé $x$ par $\tan(x)$ dans l'expression de $f'(x)$)*

*Maintenant, pour $\tan'(x)$, on a le choix entre deux expressions (cf 2)a)). Il me semble que le choix de l'expression la plus appropriée ici est évident...*

$\forall x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{4}],\ g'(x) = (1+\tan^2(x)) \times \dfrac{1}{1+\tan^2(x)}$ Finalement : $\boxed{\forall x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{4}],\ g'(x) = 1}$

2)e) En primitivant ($g$ est une primitive de $g'$), on obtient :
$\forall x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{4}],\ \ g(x) = x + C$ où $C$ est une constante à déterminer.
*La valeur que prend $g$ en un point suffira à la déterminer...*

D'une part, $g(0) = 0 + C = C$.
D'autre part (par définition de $g$), $g(0) = f(\tan(0)) = f(0) = 0$ (d'après l'énoncé).
Donc $C = 0$. On a donc montré : $\boxed{\forall x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{4}],\ g(x) = x}$

*Comment utiliser ça pour trouver $f(1)$ ?*

$f(1) = f(\tan(\frac{\pi}{4})) = g(\frac{\pi}{4})$. Donc $\boxed{f(1) = \frac{\pi}{4}}$.

3) $f$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$ (cf 1)).
Donc : $\forall x \in [0\ ;\ 1],\ f(0) \leq f(x) \leq f(1)$, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$

Autrement dit : $\boxed{\forall x \in [0\ ;\ 1],\ 0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}}$

*Pour l'anecdote, si on étend son domaine de définition à $\mathbb{R}$, la fonction $f$ est la fonction arctan qui, à tout $x \in \mathbb{R}$, associe le réel $y \in ]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}[$ tel que $x = \tan(y)$*

**Partie B**

1) *Astuce : remarquer que les deux intégrales de part et d'autre du signe = iraient bien ensemble...*

$\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \Big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\Big)\mathrm{d}x$ par linéarité
*Oh, mais que reconnaît-on sous le signe intégrale ? N'est-ce pas là la dérivée d'un produit ?*
Donc $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b$

Autrement dit : $\boxed{\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x}$

2) $I_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$
*Comment utiliser une intégration par partie ? Il n'y a que $f$ ! Qui serait $u$ ? Qui serait $v$ ?*
*Un peu d'imagination, que diable ! $f(x) = 1 \times f(x)$...*
$I_0 = \displaystyle\int_0^1 1 \times f(x)\,\mathrm{d}x$. En posant : $u(x) = x$, on a $u'(x) = 1$
Et en posant $v(x) = f(x)$, on a $v'(x) = f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. On reconnaît donc $I_0 = \displaystyle\int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x$

Une intégration par parties fournit donc :

$$I_0 = \Big[u(x)v(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[xf(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$\Big[xf(x)\Big]_0^1 = 1 \times f(1) - 0 \times f(0) = f(1) = \dfrac{\pi}{4}$ (d'après A-2)e) )

*Par ailleurs, on reconnaît en* $\dfrac{x}{1+x^2}$ *une forme* $\dfrac{h'(x)}{h(x)}$ *(à une constante multiplicative près)*

En posant $h(x) = \ln(1+x^2)$, on obtient $h'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$. D'où : $\dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{1}{2} \times h'(x)$

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ sur $[0\ ;\ 1]$ est donc $x \mapsto \dfrac{1}{2} \times h(x) = \dfrac{1}{2} \times \ln(1+x^2)$

Donc $I_0 = \dfrac{\pi}{4} - \Big[\dfrac{1}{2} \times \ln(1+x^2)\Big]_0^1 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2} \times \ln(1+1^2) + \dfrac{1}{2} \times \ln(1+0^2)$

En conclusion : $\boxed{I_0 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\ln(2)}{2}}$

3)a) On a montré (cf A3) que pour tout $x \in [0\ ;\ 1],\ f(x) \geq 0$.
Soit $n$ un entier naturel non nul.
Pour tout $x \in [0\ ;\ 1],\ x^n \geq 0$. Donc pour tout $x \in [0\ ;\ 1],\ x^n f(x) \geq 0$
Par positivité, on a donc : $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$. Autrement dit : $\boxed{I_n \geq 0}$

3)b) De même, on a montré (cf A3) que pour tout $x \in [0\ ;\ 1],\ f(x) \leq \dfrac{\pi}{4}$.
Soit $n$ un entier naturel non nul.
Pour tout $x \in [0\ ;\ 1],\ x^n \geq 0$. Donc pour tout $x \in [0\ ;\ 1],\ x^n f(x) \leq \dfrac{\pi}{4} \times x^n$

On a donc : $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{\pi}{4} \times x^n\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \times \Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{n+1}$

On a donc montré : pour tout $n > 0$, $\boxed{I_n \leq \dfrac{\pi}{4(n+1)}}$

3)c) *Cette question est une question cadeau, même - et surtout - pour ceux qui auraient eu du mal avec les précédentes. On a établi un encadrement de $I_n$, et on demande ensuite la limite de $I_n$ ? Gendarmes, je vous vois venir d'ici.*

D'après 3)a) et 3)b) : $\forall n > 0,\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{\pi}{4(n+1)}$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{4(n+1)} = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$