Déplacement d'un lapin

Ayoub Hajlaoui

Dans son terrier trois-pièces, l'indécis mammifère
Déambule sans cesse à un rythme d'enfer.

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure) *Bac S Polynésie, juin 2018*

Un lapin se déplace dans un terrier composé de trois galeries, notées A, B et C, dans chacune desquelles il est confronté à un stimulus particulier. À chaque fois qu'il est soumis à un stimulus, le lapin reste dans la galerie où il se trouve ou change de galerie. Cela constitue une étape.

Soit n un entier naturel. On note a_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie A à l'étape n ». On note b_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie B à l'étape n ». On note c_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie C à l'étape n ». À l'étape $n = 0$, le lapin est dans la galerie A.

Une étude antérieure des réactions du lapin face aux différents stimuli permet de modéliser ses déplacements par le système suivant :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{cases}$$

L'objectif de cet exercice est d'estimer dans quelle galerie le lapin a la plus grande probabilité de se trouver à long terme.

Partie A

À l'aide d'un tableur, on obtient le tableau de valeurs suivant :

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	0	1	0	0
3	1	0,333	0,667	0
4	2	0,278	0,556	0,167
5	3	0,231	0,574	0,194
6	4	0,221	0,571	0,208
7	5	0,216	0,572	0,212
8	6	0,215	0,571	0,214
9	7	0,215	0,571	0,214
10	8	0,214	0,571	0,214
11	9	0,214	0,571	0,214
12	10	0,214	0,571	0,214

1. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C3 et recopier vers le bas pour remplir la colonne C ?
2. Quelle conjecture peut-on émettre ?

Partie B

1. On définit la suite (u_n), pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n - c_n$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison.
   (b) Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = b_n - \dfrac{4}{7}$ pour tout entier naturel n.
   (a) Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$ et en déduire que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{6}v_n$.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$a_n = \frac{3}{14}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n, \quad b_n = \frac{4}{7}-\frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad \text{et} \quad c_n = \frac{3}{14}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

4. Que peut-on en déduire sur la position du lapin après un très grand nombre d'étapes ?

Correction :

Partie A

1) La colonne C correspond aux valeurs de la suite (b_n) (aux rangs spécifiés dans la colonne A). La cellule C3 doit donc contenir la valeur b_1. D'après le système donné, $b_1 = \frac{2}{3}a_0 + \frac{1}{2}b_0 + \frac{2}{3}c_0$. C'est la cellule B2 qui contient a_0. De même, C2 contient b_0 et D2 contient c_0.

Dans la cellule C3, il faut donc entrer la formule suivante : $\boxed{= \frac{2}{3}\text{*B2} + \frac{1}{2}\text{*C2} + \frac{2}{3}\text{*D2}}$

2) Etant données les premières valeurs des suites (a_n), (b_n) et (c_n), on peut émettre la conjecture que les trois convergent. De plus, (a_n) et (b_n) semblent converger vers la même valeur.

Partie B

1)a) Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n - \frac{1}{4}b_n - \frac{1}{3}c_n = \frac{1}{3}a_n - \frac{1}{3}c_n$

Donc $u_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n - c_n) = \frac{1}{3}u_n$. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc géométrique de raison } \frac{1}{3}}$

1)b) De plus, le premier terme de (u_n) est $u_0 = a_0 - c_0 = 1 - 0 = 1$.

En effet, l'énoncé nous dit qu'à l'étape $n = 0$, le lapin se situe dans la galerie A. a_0, qui est la probabilité que le lapin se situe dans la galerie A à l'étape $n = 0$, vaut donc 1 (et $b_0 = c_0 = 0$).

L'expression générale de u_n est donc : $u_n = 1 \times (\frac{1}{3})^n$. Autrement dit : $\boxed{u_n = (\frac{1}{3})^n = \frac{1}{3^n}}$

2)a) a_n, b_n et c_n sont les probabilités qu'au rang n, le lapin se situe respectivement dans la galerie A, dans la galerie B, ou dans la galerie C. Le lapin étant, à chaque instant, dans l'une exactement (et pas plus) de ces trois galeries, on a nécessairement, pour tout entier naturel n : $a_n + b_n + c_n = 1$.

Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = b_{n+1} - \frac{4}{7} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n - \frac{4}{7} = \frac{2}{3}(a_n + c_n) + \frac{1}{2}b_n - \frac{4}{7}$

Je ne veux plus de a_n et c_n, juste du b_n (pour espérer voir apparaitre v_n, ce dernier étant donné par l'énoncé en fonction de b_n)

Or, $a_n + b_n + c_n = 1$, et donc $a_n + c_n = 1 - b_n$. En remplaçant dans l'expression de v_{n+1}, on obtient : $v_{n+1} = \frac{2}{3}(1 - b_n) + \frac{1}{2}b_n - \frac{4}{7} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{2}b_n - \frac{4}{7} = \frac{14}{21} - \frac{12}{21} - \frac{4}{6}b_n + \frac{3}{6}b_n = \frac{2}{21} - \frac{1}{6}b_n$

On est censés tomber sur $-\frac{1}{6}v_n$. Donc autant factoriser par $-\frac{1}{6}$ et voir..

$v_{n+1} = -\dfrac{1}{6} \times (-6 \times \dfrac{2}{21} + b_n) = -\dfrac{1}{6} \times (b_n - \dfrac{4}{7})$. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = -\dfrac{1}{6}v_n}$

2)b) (v_n) est donc géométrique de raison $-\dfrac{1}{6}$, et de premier terme $v_0 = b_0 - \dfrac{4}{7} = -\dfrac{4}{7}$

On a donc : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_n = -\dfrac{4}{7} \times (-\dfrac{1}{6})^n}$

3) A partir de l'expression de v_n (2b) et du lien entre v_n et b_n, on obtient :
$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = v_n + \dfrac{4}{7}$. D'où $\boxed{b_n = \dfrac{4}{7} - \dfrac{4}{7}(-\dfrac{1}{6})^n}$

Restent à déterminer les expressions de a_n et c_n.
On sait que pour tout entier naturel n : $\begin{cases} a_n - c_n = & u_n \\ a_n + c_n = & 1 - b_n \end{cases}$

Cela donne : $\begin{cases} 2a_n = u_n + 1 - b_n & \textit{(ligne 1 + ligne 2 du système précédent)} \\ 2c_n = 1 - b_n - u_n & \textit{(ligne 2 - ligne 1 du système précédent)} \end{cases}$

Par suite : $\begin{cases} a_n = \frac{1}{2}(u_n + 1 - b_n) = \frac{1}{2}\left((\frac{1}{3})^n + 1 - \frac{4}{7} + \frac{4}{7}(-\frac{1}{6})^n\right) \\ c_n = \frac{1}{2}(1 - b_n - u_n) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{7} + \frac{4}{7}(-\frac{1}{6})^n - (\frac{1}{3})^n\right) \end{cases}$

Finalement :

$$\boxed{a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n,\quad b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad \text{et} \quad c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n.}$$

4) *Que veulent-ils dire par " après un très grand nombre d'étapes "?*

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ et $\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$ tendent vers 0, car $\dfrac{1}{3}$ et $-\dfrac{1}{6}$ sont dans $]-1\ ;\ 1[$
On en déduit donc, par opérations sur les limites, les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n) :
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{3}{14}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{4}{7}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \dfrac{3}{14}$

Après un très grand nombre d'étapes, la probabilité que le lapin se trouve dans la galerie A est très proche de $\dfrac{3}{14}$. De même, les probabilités qu'il se trouvent dans les galeries B et C sont très proches respectivement de $\dfrac{4}{7}$ et $\dfrac{3}{14}$.

On vérifie aisément que la somme de ces trois probabilités fait 1.