Trigonométrie (et un peu de complexes)

Ayoub Hajlaoui

Il faut, pour éviter que le temps ne te piège,
Savoir raison garder quand les fonctions t'assiègent.

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure) *d'après Mines 2008 Maths 2 (PC)*

Soit p une constante réelle telle que $0 < p < 1$ et soit f la fonction qui à tout nombre réel x associe le complexe $f(x) = p^2\cos(x) - ip\sin(x) + 1 - p^2$

1) On rappelle que pour tous réels a et b, $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

a) Montrer que pour tout réel x, $\sin^2(x) = \dfrac{1}{2}\Big(1 - \cos(2x)\Big)$

b) En déduire que pour tout réel x, $\sin^4\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\Big(1-\cos(x)\Big)^2}{4}$

2) Établir que pour tout réel x, $\Big|f(x)|^2 = 1 - 4(p^2 - p^4)\sin^4\left(\dfrac{x}{2}\right)$

3) En déduire que $|f(0)| = 1$ et, que, pour tout $x \in]0\ ;\ \pi]$, $\Big|f(x)\Big| < 1$

4) Montrer que pour tout réel $p \in]0\ ;\ 1[$, $p^2 - p^4 \leq \dfrac{1}{4}$

Correction :

1)a) *Il suffit de se demander comment utiliser à bon escient la formule rappelée par l'énoncé... Vu qu'elle est valable pour tous réels a et b, on peut prendre les a et b qu'on veut. Par quoi les remplacer pour obtenir le résultat demandé ?*

En utilisant la formule rappelée : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)$

Autrement dit : $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Contemplons un instant ce que nous avons obtenu, tel le peintre qui fait un pas en arrière pour regarder l'état de son tableau, afin de décider quel coup de pinceau suivant sera judicieux.

Dans le résultat demandé, il y a du $\cos(2x)$. *Bonne nouvelle, nous en avons. Il y a du* $\sin^2(x)$. *Nous en avons aussi. Mais nous avons du* $\cos^2(x)$ *qui ne figure pas dans ledit résultat...*

Donc $\cos(2x) = 1 - \sin^2(x) - \sin^2(x)$ (car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$)

Donc $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$

Isolons maintenant $\sin^2(x)$, *pour arriver au résultat demandé.*

Par suite, $2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$, et finalement : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^2(x) = \dfrac{1}{2}\Big(1-\cos(2x)\Big)}$

1)b) L'égalité précédente étant valable pour tout réel, on peut, pour tout réel x, l'appliquer à $\dfrac{x}{2}$. On obtient alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^2(\dfrac{x}{2}) = \dfrac{1}{2}\Big(1 - \cos(2 \times \dfrac{x}{2})\Big)$

Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R},\quad \sin^2(\dfrac{x}{2}) = \dfrac{1}{2}\Big(1-\cos(x)\Big)$. *Et maintenant, petit coup de carré...*

Finalement (en élevant chaque membre de l'égalité au carré) : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^4\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\Big(1-\cos(x)\Big)^2}{4}}$

2) *Les ennuis commencent vraiment ici. On doit montrer une égalité entre* $|f(x)|^2$ *d'une part, et* $1-4(p^2-p^4)\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)$ *d'autre part.* $|f(x)|$ *est bien le module de* $f(x)$*, vu que* $f(x)$ *est un nombre complexe. Quant au second membre de l'égalité à démontrer, on y retrouve un terme sur lequel on a travaillé...*

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = p^2\cos(x) + 1 - p^2 - ip\sin(x)$ *On l'écrit dans le " bon " ordre pour bien distinguer partie réelle et partie imaginaire.*

Donc $|f(x)|^2 = (p^2\cos(x)+1-p^2)^2 + (-p\sin(x))^2$

(Rappelons que pour tout complexe z*,* $|z| = \sqrt{\left(\mathrm{Re}(z)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z)\right)^2}$ *)*

Donc $|f(x)|^2 = (p^2\cos(x)+1-p^2)^2 + p^2\sin^2(x)$
$= \underline{p^4\cos^2(x) + 1 + p^4 + 2p^2\cos(x) - 2p^4\cos(x) - 2p^2 + p^2\sin^2(x)}$

(Soit vous savez $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$*, soit vous le faites par étape :* $(a+b+c)^2 = ((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$ *)*

Arrêtons-nous là pour $|f(x)|^2$*, et intéressons-nous à* $1-4(p^2-p^4)\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)$*...*

D'après 1)b), $1-4(p^2-p^4)\sin^4\left(\frac{x}{2}\right) = 1-4(p^2-p^4)\times\frac{\left(1-\cos(x)\right)^2}{4} = 1-(p^2-p^4)(1-\cos(x))^2$
$= 1-(p^2-p^4)(1-2\cos(x)+\cos^2(x))$
$= 1-(p^2-2p^2\cos(x)+p^2\cos^2(x)-p^4+2p^4\cos(x)-p^4\cos^2(x))$
$= \underline{p^4\cos^2(x)+1+p^4+2p^2\cos(x)-2p^4\cos(x)-p^2-p^2\cos^2(x)}$

En développant, j'ai changé l'ordre pour mettre au début les termes qui étaient présents chez $|f(x)|^2$ *pour mieux voir les ressemblances (et les éventuelles différences) entre les deux expressions.*

Pour obtenir l'égalité demandée, il suffit donc de montrer :
$-2p^2 + p^2\sin^2(x) = -p^2 - p^2\cos^2(x)$. Faisons-le.
$-2p^2 + p^2\sin^2(x) = -2p^2 + p^2(1-\cos^2(x)) = -p2 - p^2\cos^2(x)$

En conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \left|f(x)\right|^2 = 1-4(p^2-p^4)\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)}$

3) On peut donc en déduire : $\left|f(0)\right|^2 = 1-4(p^2-p^4)\sin^4(0)$, avec $\sin^4(0) = 0^4 = 0$. Donc $|f(0)|^2 = 1$. Donc $|f(0)| = 1$. *On a même* $f(0) = 1$ *avec l'expression initiale de* f*, en se rappelant que* $\cos(0) = 1$ *et* $\sin(0) = 0$*...*

$\forall x \in]0\ ;\ \pi],\ \left|f(x)\right|^2 = 1-4(p^2-p^4)\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)$

Montrons : $4(p^2-p^4)\sin^4\left(\frac{x}{2}\right) > 0$ (ce qui entraînera que $1-4(p^2-p^4)\sin^4\left(\frac{x}{2}\right) < 1$)

$p^2-p^4 = p^2(1-p^2) = p^2(1+p)(1-p)$

D'après l'énoncé, $0<p<1$, donc $p^2(1+p)(1-p) > 0$.

Par ailleurs, pour tout $x \in\ ]0\ ;\ \pi]$, $\frac{x}{2} \in\ ]0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$ et donc $\sin\left(\frac{x}{2}\right) > 0$. D'où $\sin^4\left(\frac{x}{2}\right) > 0$

Finalement, $4(p^2-p^4)\sin^4\left(\frac{x}{2}\right) > 0$, et on a donc bien : $\boxed{\text{pour tout } x \in\ ]0\ ;\ \pi],\ |f(x)| < 1}$

4) *Comment se servir de ce qui précède ? Où passerait le* $\sin^4$ *devant* p^2-p^4 *?*

D'après 2), pour tout réel x tel que $\sin(\frac{x}{2}) \neq 0$, $p^2-p^4 = \frac{1-|f(x)|^2}{4\sin^4(\frac{x}{2})}$. En appliquant cette égalité à $x = \pi$ *(pour que* $\sin(\frac{x}{2}) = 1$ *en bas)*, on obtient :

$\boxed{p^2-p^4 = \frac{1-|f(\pi)|^2}{4} \leq \frac{1}{4}}$