Intégrales, exponentielles, et changement de variable

Ayoub Hajlaoui

Donne-nous des indices, valse des primitives,
Dont tire bénéfice une plume attentive.

Énoncé : (temps conseillé : 1 h 30 min) d'après bac S Liban, mai 2016 (sauf partie C)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1-x}}$.

Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}}$.
3. Montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(2) + 1 - \ln(1+\mathrm{e})$.

Partie B

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les fonctions f_n définies sur $[0\,;\,1]$ par : $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}}$.

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On considère la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
3. La suite (u_n) admet-elle une limite ?

Partie C

Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Soient K et L deux réels tels que K soit un réel non nul.

1. Montrer l'égalité suivante : $\displaystyle\int_a^b g(Kx+L)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{K}\int_{Ka+L}^{Kb+L} g(x)\,\mathrm{d}x$.
   Indication : on pourra appeler G une primitive de g.
2. f est la fonction de la partie A. Donner, en justifiant, $\displaystyle\int_{-1}^0 f(-x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} f(4x)\,\mathrm{d}x$

Correction :

Partie A

1) f est dérivable sur son domaine de définition ($\mathbb{R}$) par composée et quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{v(x)}$ avec $v(x) = 1 + e^{1-x}$ (et donc $v'(x) = -e^{1-x}$)

$\forall x \in [0\ ;\ 1],\ f'(x) = -\dfrac{v'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{e^{1-x}}{(1+e^{1-x})^2} > 0$ *(une exponentielle divisée par un carré)*

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

$\boxed{f \text{ est donc strictement croissante sur } [0\ ;\ 1].}$

2) *Il faut simplement se demander quelle opération a été effectuée pour passer de l'expression de f donnée par l'énoncé à celle qu'il faut obtenir... Manifestement, le numérateur a été multiplié par e^x. Donc forcément, le dénominateur aussi, si l'on veut que ce soit une égalité...*

$$\forall x \in [0\ ;\ 1],\ f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1-x}} = \frac{1 \times e^x}{(1+\mathrm{e}^{1-x}) \times e^x} = \frac{e^x}{e^x + e^{1-x}e^x} = \frac{e^x}{e^x + e^{1-x+x}} = \frac{e^x}{e^x + e^1}$$

Donc : $\boxed{\forall x \in [0\ ;\ 1],\ f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}}}$

3) *Il nous faut trouver une primitive de f.*

$\forall x \in [0\ ;\ 1],\ f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = e^x + e$. Une primitive de f sur $[0\ ;\ 1]$ est donc la fonction F définie par $F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|e^x + e|) = \ln(e^x + e) \quad (\text{car } e^x + e > 0)$

Ne pas oublier la valeur absolue quand on primitive $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$*...*

Donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(e^x + e)\Big]_0^1 = \ln(e^1 + e) - \ln(e^0 + e) = \ln(2e) - \ln(1+e)$
$= \ln(2) + \ln(e) - \ln(1+\mathrm{e})$

En conclusion : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(2) + 1 - \ln(1+\mathrm{e})}$

Partie B

1) *Interpréter graphiquement une intégrale revient presque toujours à parler d'aire. Mais il faut le justifier soigneusement...*

$\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est (strictement) positive sur $[0\ ;\ 1]$. Et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$

u_n correspond donc à l'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, l'axe des abscisses, et $\mathcal{C}_n$ (courbe de f_n).

$u_0 = \displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1 + 0 \times \mathrm{e}^{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = \Big[x\Big]_0^1 = 1 - 0$. Donc $\boxed{u_0 = 1}$

2) *C'est le sens de variation de la suite (u_n) qui nous intéresse. Attention à ne pas confondre avec le sens de variation d'une fonction f_n (pour un n fixé).*

Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + (n+1) \times \mathrm{e}^{1-x}}\,\mathrm{d}x$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + n\mathrm{e}^{1-x}}\,\mathrm{d}x$

Comment les comparer ?

$n + 1 > n$

Donc $\forall x \in [0\ ;\ 1],\ (n+1)e^{1-x} > ne^{1-x} \quad$ (on a multiplié l'inéquation par $e^{1-x} > 0$)

Ensuite : $\forall x \in [0\ ;\ 1],\ 1 + (n+1)e^{1-x} > 1 + ne^{1-x}$

Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0\ ;\ +\infty[$: $\dfrac{1}{1 + (n+1)\mathrm{e}^{1-x}} < \dfrac{1}{1 + n\mathrm{e}^{1-x}}$

Cette inégalité étant vraie pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, on obtient, par passage à l'intégrale :

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + (n+1) \times \mathrm{e}^{1-x}}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{1}{1 + n\mathrm{e}^{1-x}}\,\mathrm{d}x \quad$ *(propriété de positivité)*

On a donc prouvé : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$

3) *Ah, si seulement elle était minorée. Mais, attendez...*

$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \geq 0$. Donc par intégration d'une fonction positive, $u_n \geq 0$.

La suite (u_n) est donc minorée par 0. De plus (cf B-2), elle est décroissante. Donc elle converge. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ admet bien une limite.}}$

Partie C

1) *L'indication est bien gentille mais nous, ce qu'il nous faudrait, c'est une primitive de $x \mapsto g(Kx+L)$... Il est bon de penser à $x \mapsto G(Kx+L)$ mais ce n'est pas encore tout à fait ça. Voyez plutôt :*

Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
Posons $\alpha(x) = G(Kx+L)$.
Alors $\alpha'(x) = KG'(Kx+L) = Kg(Kx+L)$. *Ne surtout pas oublier le K qui sort en dérivant...*

Une primitive de $x \mapsto g(Kx+L)$ est donc $x \to \frac{1}{K} \times \alpha(x) = \frac{1}{K} \times G(Kx+L)$

Donc $\int_a^b g(Kx+L)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{K} \times G(Kx+L)\right]_a^b = \frac{1}{K} \times G(Kb+L) - \frac{1}{K} \times G(Ka+L)$

On obtient : $\int_a^b g(Kx+L)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{K} \times \Big(G(Kb+L) - G(Ka+L)\Big)$

D'autre part, $\frac{1}{K}\int_{Ka+L}^{Kb+L} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{K} \times \Big[G(x)\Big]_{Ka+L}^{Kb+L} = \frac{1}{K} \times \Big(G(Kb+L) - G(Ka+L)\Big)$

On en conclut l'égalité : $\boxed{\int_a^b g(Kx+L)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{K}\int_{Ka+L}^{Kb+L} g(x)\,\mathrm{d}x}$

Ce que nous venons de faire équivaut, de manière timide et détournée, à ce qu'on appelle un changement de variable...

2) $\int_{-1}^0 f(-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 f(-1 \times x + 0)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-1}\int_{-1\times(-1)+0}^{-1\times 0+0} f(x)\,\mathrm{d}x$ (d'après C-1, en posant $a=-1, b=0, K=-1, L=0$)

Donc $\int_{-1}^0 f(-x)\,\mathrm{d}x = -\int_1^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

D'où (cf A-3) : $\boxed{\int_{-1}^0 f(-x)\,\mathrm{d}x = \ln(2) + 1 - \ln(1+\mathrm{e})}$

De la même manière, en posant $a=0, b=\frac{1}{4}, K=4$ et $L=0$:

$\int_0^{\frac{1}{4}} f(4x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}} f(4 \times x + 0)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{4\times 0+0}^{4\times\frac{1}{4}+0} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

D'où (cf A-3) : $\boxed{\int_0^{\frac{1}{4}} f(4x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\Big(\ln(2) + 1 - \ln(1+\mathrm{e})\Big)}$