Ln et son carré

Ayoub Hajlaoui

Excitant la marée, les voiles vent debout,
ln et son carré se battent devant nous.

Énoncé : (temps conseillé : 1 h 20 min) d'après bac S Liban, juin 2007

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \text{ et } g(x) = (\ln x)^2.$$

On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthogonal.

1. (a) Étudier le signe de $(\ln x)(1 - \ln x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   (b) En déduire la position relative des deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Pour x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, M est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et N est le point de $\mathcal{C}'$ de même abscisse.
   (a) Soit h la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.
   Étudier les variations de la fonction h sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   (b) En déduire que sur l'intervalle $[1\,;\ \mathrm{e}]$, la valeur maximale de la distance MN est obtenue pour $x = \sqrt{\mathrm{e}}$.
   (c) Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$.
   (d) En déduire que, sur $]0\,;1[\ \cup\ ]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$, il existe deux réels a et b $(a < b)$ pour lesquels la distance MN est égale à 1.
3. (a) Vérifier que la fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$.
   (c) Vérifier que la fonction G définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $G(x) = x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right]$ est une primitive de la fonction g sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   (d) On considère la partie du plan délimitée par les courbes $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
   Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ en unités d'aire de cette partie du plan.

Correction :

1)a) *Pour étudier le signe de ce produit de deux termes, étudions le signe de chacun des termes.*

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $\ln(1) = 0$.
Donc : $\forall x \in]0\ ;\ 1[,\ \ln(x) < 0$ et $\forall x \in]1\ ;\ +\infty[,\ \ln(x) > 0$

D'autre part, résolvons sur $]0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $1 - \ln(x) \geq 0$:
$1 - \ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \leq 1 \iff x \leq e^1 = e$ par croissance de la fonction exponentielle.

On obtient donc le tableau de signe suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$(\ln(x))(1-\ln x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

1)b) Pour étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}$ (courbe de f) et $\mathcal{C}'$ (courbe de g), on étudie le signe de $f-g$. Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f(x)-g(x) = \ln x - (\ln x)^2 = (\ln x)(1-\ln x)$

Mais ça tombe super bien, on a trouvé le signe de de $(\ln x)(1-\ln x)$ *à la question précédente !*
D'après 1)a), $f(x)-g(x) > 0$ pour $x \in]1\ ;\ e[$, $f(x)-g(x) < 0$ pour $x \in]0\ ;\ 1[\cup]e\ ;\ +\infty[$
Et $f(x) = g(x)$ pour $x = 1$ et $x = e$.

Donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{C}'$ sur $]1\ ;\ e[$ et en-dessous sur $]0\ ;\ 1[\cup]e\ ;\ +\infty[$.

Les deux courbes se croisent en $x = 1$ et $x = e$.

2)a) $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[$, $h(x) = (\ln x)(1-\ln x)$.
h est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par produit de fonctions dérivables.
$\forall x \in]0\ ;\ +\infty[$, $h'(x) = \dfrac{1}{x}(1-\ln x) + (\ln x)\times(-\dfrac{1}{x}) = \dfrac{1-2\ln x}{x}$

Sur $]0\ ;\ +\infty[$, $h'(x)$ est donc du signe de $1-2\ln x$. Résolvons l'inéquation $h'(x) \geq 0$:
$h'(x) \geq 0 \iff 1-2\ln x \geq 0 \iff 2\ln x \leq 1 \iff \ln x \leq \dfrac{1}{2} \iff x \leq e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ par croissance de la fonction exp. On en déduit le tableau de signe de h' et les variations de h :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
h	‖	$\nearrow$		$\searrow$	

2)b) *Les points M et N ayant la même abscisse, la distance entre eux correspond à la différence entre leurs ordonnées, prise en valeur absolue (MN est une distance donc positive).*

$MN = |f(x)-g(x)|$. Sur l'intervalle $[1\ ;\ e]$, $f(x) \geq g(x)$ (d'après 1)a)). Donc $f(x)-g(x) \geq 0$.
Donc $MN = |f(x)-g(x)| = f(x)-g(x) = h(x)$

D'après 2)a), la fonction h admet un maximum global en $\sqrt{e}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$. Or, $1 < \sqrt{e} < e$ (car $e^0 < e^{\frac{1}{2}} < e^1$ par stricte croissance de la fonction exp).
Donc h admet un maximum en $\sqrt{e}$ sur $[1\ ;\ e]$. Autrement dit :

sur l'intervalle [1 ; e], la valeur maximale de la distance MN est obtenue pour $x = \sqrt{\mathrm{e}}$.

2)c) $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[$, $(\ln x)^2 - \ln x = 1 \iff (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$
Dans ce genre de situation, il faut évidemment penser à un changement de variable pour se ramener à une équation du second degré. S'il y a moyen de l'éviter en remarquant simplement une identité remarquable (ce qui n'est pas le cas ici), c'est encore mieux. C'eût été le cas, par exemple, pour l'équation $(\ln x)^2 - 2\ln x + 1 = 0 \iff (\ln x - 1)^2 = 0$...

On pose $X = \ln x$ (donc $x = e^X$). L'équation à résoudre devient $X^2 - X - 1 = 0$.
Le calcul du discriminant donne $\Delta = 5 > 0$.
Les deux racines du polynôme sont $X_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

On en déduit donc que l'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$ a deux solutions dans $]0\ ;\ +\infty[$:
$\boxed{x_1 = e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \text{ et } x_2 = e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$

2)d) Sur $]0\ ;\ 1[\cup]e\ ;\ +\infty[$, $g(x) > f(x)$ (d'après 1)b)). Or, $MN = |f(x) - g(x)|$.
Donc pour $x \in]0\ ;\ 1[\cup]e\ ;\ +\infty[$, $MN = g(x) - f(x)$ (car $g(x) - f(x) < 0$)
Donc pour $x \in]0\ ;\ 1[\cup]e\ ;\ +\infty[$, $MN = 1 \iff g(x) - f(x) = 1 \iff (\ln x)^2 - \ln x = 1$

Or, on a vu (en 2)c)) que l'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$ a deux solutions dans $]0\ ;\ +\infty[$. Ces solutions sont $x_1 = e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ et $x_2 = e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.
On remarque : $0 < x_1 < 1$ et $e < x_2$. En effet : $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ donc $x_1 < e^0 = 1$ (par stricte croissance de exp), et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ donc $x_2 > e^1 = e$

$\boxed{\text{En conclusion, il y a deux abscisses } a \text{ et } b\ (a < b) \text{ sur }]0\ ;\ 1[\cup]e\ ;\ +\infty[\text{ pour lesquels } MN = 1.}$
$(a = x_1$ et $b = x_2)$

3)a) F est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par produit et somme de fonctions dérivables.
$\forall x \in]0\ ;\ +\infty[,\ F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x = f(x)$

$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est donc une primitive de la fonction } f \text{ sur }]0\ ;\ +\infty[}$

3)b) On en déduit : $\displaystyle\int_1^e \ln x \, dx = [F(x)]_1^e = e \times \ln e - e - (1 \times \ln 1 - 1) = e - e + 1$

Donc $\boxed{\displaystyle\int_1^e \ln x \, dx = 1}$

3)c) F est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par produit et somme de fonctions dérivables.
$\forall x \in]0\ ;\ +\infty[,\ G'(x) = 1 \times [(\ln x)^2 - 2\ln x + 2] + x \times [2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x - \dfrac{2}{x}]$
$G'(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x + 2 + 2\ln x - 2 = (\ln x)^2 = g(x)$

$\boxed{G \text{ est donc bien une primitive de } g \text{ sur }]0\ ;\ +\infty[}$

3)d) Sur $]1\ ;\ e[$, $\mathcal{C}$ (courbe de f) est au-dessus de $\mathcal{C}'$ (courbe de g). L'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par les courbes $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ s'exprime donc comme suit : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^e f(x) - g(x) \, dx$ *(ça aurait été $\displaystyle\int_1^e g(x) - f(x)\, dx$ si $\mathcal{C}'$ était au-dessus de $\mathcal{C}$)*

Donc (par linéarité) $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^e f(x)\, dx - \int_1^e g(x)\, dx = 1 - \int_1^e g(x)\, dx$ (d'après 3)b)).

Par suite, $\mathcal{A} = 1 - [G(x)]_1^e = 1 - e \times \Big((\ln e)^2 - 2\ln e + 2\Big) + 1 \times \Big((\ln 1)^2 - 2\ln 1 + 2\Big)$
$= 1 - e + 2$

En conclusion, $\boxed{\mathcal{A} = 3 - e \text{ (en unités d'aire)}}$