Triangles équilatéraux avec j

Ayoub Hajlaoui

Je veux voir vous quitter ces expressions perplexes
que peuvent susciter trois affixes complexes.

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure) *bac S Asie, juin 2015*

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1. (a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.
   (b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.
2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.
3. Démontrer les égalités suivantes :
   (a) $\mathrm{j}^3 = 1$;
   (b) $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.
4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes $1, \mathrm{j}$ et j^2 dans le plan. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = \mathrm{j}(c - b)$.
2. En déduire que AC = BC.
3. Démontrer l'égalité : $a - b = \mathrm{j}^2(b - c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Correction :

Partie A

1)a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+z+1 = 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = 1^2-4\times1\times1$

$\Delta = -3 < 0$. L'équation a donc deux solutions dans $\mathbb{C}$, qui sont : $z_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1}$

L'ensemble des solutions complexes de cette équation est donc : $\boxed{\mathcal{S} = \{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\}}$

1)b) $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est bien solution de cette équation (c'est z_2).
J'avoue ne pas comprendre l'intérêt d'avoir fait de ceci une question à part entière.

2) $|j|=|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}|=\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}$. Donc $\boxed{|j|=1}$

$-\frac{1}{2}=-\cos(\frac{\pi}{3})=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{2\pi}{3})$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin(\frac{\pi}{3})=\sin(\pi-\frac{\pi}{3})=\sin(\frac{2\pi}{3})$

$\boxed{\text{Un argument de j est donc } \frac{2\pi}{3}.}$

On en conclut : $j=1\times e^{i\frac{2\pi}{3}}$. $\boxed{j=e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

3)a) *Pour démontrer cette égalité, on utilise évidemment la forme exponentielle, qui nous facilite largement les calculs de puissance. Le calcul du cube à partir de la forme algébrique aboutirait, mais serait une perte de temps.*

$j^3=(e^{i\frac{2\pi}{3}})^3=e^{i\frac{2\pi}{3}\times 3}=e^{i2\pi}=e^{i0}$. Donc $\boxed{j^3=1}$

3)b) *Pour démontrer cette égalité, il faut un minimum de mémoire...*

D'après 1)b), j est solution de l'équation $z^2+z+1=0$. Autrement dit, $j^2+j+1=0$
Donc $\boxed{j^2=-1-j}$ *Une pensée pour ceux qui se seront lancés dans des calculs compliqués*

4) *L'énoncé dit noir sur blanc : " le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux ". Les triangles équilatéraux... Un coup d'œil à la partie B : il y est demandé de démontrer qu'un triangle est équilatéral. Peut-être faut-il donc montrer la même chose pour PQR...*

$PQ=|1-j|$
$QR=|j-j^2|$ *Que peut-on faire pour se ramener à PQ ?*
$QR=|j(1-j)|=|j|\times|1-j|=1\times|1-j|$ (d'après 2))
Donc PQ = QR. Donc PQR est isocèle en Q.

Bien sûr, on ne va pas s'arrêter en si bon chemin. Ici, je vous ai expliqué l'intuition nous poussant à démontrer qu'en fait, PQR est équilatéral. Mais en règle générale, quand on vous demande la nature d'un triangle sans figure pour vous donner une idée, et que vous avez montré qu'il était isocèle, ayez le réflexe de vérifier si, par hasard,il ne serait pas équilatéral ou s'il n'est pas isocèle rectangle.

$PR=|1-j^2|=|1^2-j^2|=|(1-j)(1+j)|=|1-j|\times|1+j|$
Pour retomber sur PQ, ça nous arrangerait beaucoup de trouver $|1+j|=1$...
Or, $|1+j|=|-j^2|$ (car on sait $1+j+j^2=0$, d'où $1+j=-j^2$)
Donc $|1+j|=|-1|\times|j|^2=1\times 1^2=1$. On en conclut donc $PR=|1-j|=PQ=QR$

$\boxed{\text{Le triangle PQR est donc isocèle.}}$

Partie B

1) $a+jb+j^2c=0$. Or, d'après A-3)b), $j^2=-1-j$
Donc (en remplaçant j^2) : $a+jb+(-1-j)c=0$. Donc $a=-jb+c+jc$.
Enfin : $a-c=-jb+c+jc-c=jc-jb$. On en conclut : $\boxed{a-c=j(c-b)}$

2) $\mathrm{AC} = |a - c| = |\mathrm{j}(c - b)| = |\mathrm{j}| \times |c - b| = 1 \times |c - b|$. Donc $\boxed{\mathrm{AC} = \mathrm{BC}}$

3) $a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2c = 0$ donc $a = -\mathrm{j}b - \mathrm{j}^2c$. Par suite, $a - b = -\mathrm{j}b - \mathrm{j}^2c - b = (-\mathrm{j} - 1)b - \mathrm{j}^2c$
Or, d'après A-3)b), $\mathrm{j}^2 = -\mathrm{j} - 1$. Donc $a - b = \mathrm{j}^2b - \mathrm{j}^2c$.

Finalement, $\boxed{a - b = \mathrm{j}^2(b - c)}$

4) On a déjà montré (cf B-2) AC = BC.
De plus, d'après B-3, $\mathrm{AB} = |a - b| = |\mathrm{j}^2(b - c)| = |\mathrm{j}|^2 \times |b - c| = 1^2 \times |b - c|$. Donc AB = BC.

En conclusion, AB = BC = AC : $\boxed{\text{le triangle ABC est équilatéral.}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com