Probabilités et tir à l'arc

Ayoub Hajlaoui

Pour que sa flèche embroche un shérif aux abois,
Robin vise et décoche au fin fond de son bois.

Énoncé : (temps conseillé : 1 h 20 min) d'après bac S Asie, juin 2015

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes. Les probabilités seront arrondies au millième.

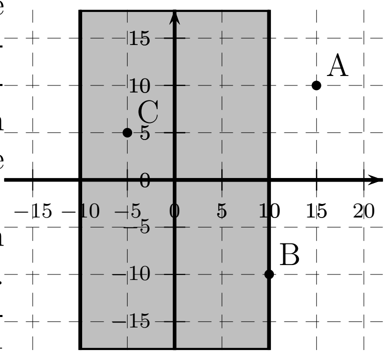
Partie A

Un concurrent participe à un concours de tir à l'arc, sur une cible circulaire. À chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est égale à 0,8.

1. Le concurrent tire quatre flèches. On considère que les tirs sont indépendants. Déterminer la probabilité qu'il atteigne au moins trois fois la cible.
2. Combien de flèches le concurrent doit-il prévoir pour atteindre en moyenne la cible douze fois ?

Partie B

Entre deux phases du concours, pour se perfectionner, le concurrent travaille sa précision latérale sur une autre cible d'entraînement, représentée ci-contre. Pour cela, il tire des flèches pour essayer d'atteindre une bande verticale, de largeur 20 cm (en grisé sur la figure), le plus près possible de la ligne verticale centrale.



On munit le plan contenant la bande verticale d'un repère : la ligne centrale visée est l'axe des ordonnées. On note X la variable aléatoire qui, à toute flèche tirée atteignant ce plan, associe l'abscisse de son point d'impact.

Ainsi, par exemple :
— si la flèche atteint le point A, le tireur a raté la bande, et X prend la valeur 15 ;
— si elle atteint le point B, l'impact est à la limite de la bande, et X prend la valeur 10 ;
— si elle atteint le point C, l'impact est dans la bande et X prend la valeur -5.

On suppose que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 10.

1. Lorsque la flèche atteint le plan, déterminer la probabilité que son point d'impact soit situé hors de la bande grisée.
2. Comment modifier les bords de la bande grisée pour faire en sorte que, lorsque la flèche atteint le plan, son point d'impact soit situé à l'intérieur de la bande avec une probabilité égale à $0,6$?

Partie C

La durée de vie (exprimée en heures) du panneau électrique affichant le score des concurrents est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$ (exprimé en h^{-1}).

1. Quelle est la probabilité que le panneau fonctionne au moins pendant 2 000 heures ?
2. *Restitution organisée des connaissances*
   Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif.
   On rappelle que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, est définie par : $\mathrm{E}(T) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t$.
   (a) On considère la fonction F, définie pour tout réel t par : $F(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$.
   Démontrer que la fonction F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie pour tout réel t par : $f(t) = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
   (b) En déduire que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.
   Quelle est l'espérance de durée de vie du panneau électrique affichant le score des concurrents ?

Correction :

Partie A

1) L'expérience consiste en une répétition de 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. La probabilité de succès de chacune des épreuves (probabilité que la flèche atteigne sa cible) est $0,8$. La variable aléatoire X comptant le nombre de flèches ayant atteint leur cible au bout des quatre tirs suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,8$.

La probabilité que le concurrent atteigne au moins trois fois sa cible est $P(X \geq 3)$

Si vous n'avez aucune notion sur les coefficients binomiaux, vous pouvez le faire à la calculatrice, en utilisant si besoin le fait que $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2)$*. Sinon, vous pouvez regarder ce qui suit :*

$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} \times 0,8^3(1 - 0,8)^{4-3} + \binom{4}{4} \times 0,8^4(1 - 0,8)^{4-4}$

$P(X \geq 3) = \binom{4}{1} \times 0,8^3 \times 0,2^1 + 1 \times 0,8^4 \times 1 = 4 \times 0,8^3 \times 0,2 + 0,8^4 \approx 0,819$

$(\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k})$

$\boxed{\text{La probabilité que le concurrent atteigne au moins trois fois sa cible est d'environ } 0,819.}$

2) La variable aléatoire C compte maintenant le nombre de flèches ayant atteint leur cible au bout de n tirs. Elle suit toujours une loi binomiale, cette fois-ci de paramètres n inconnu et $p = 0,8$. On cherche n tel que l'espérance $E(X)$ de X soit égale à 12.

Or, $E(X) = np$ (espérance d'une loi binomiale). On veut donc : $np = 12$, c'est-à-dire : $n = \dfrac{12}{p} = \dfrac{12}{0,8} = 15$. $\boxed{\text{Le concurrent doit prévoir 15 flèches pour atteindre en moyenne la cible 12 fois.}}$

Partie B

1) La probabilité que le point d'impact de la flèche soit situé hors de la bande grisée est $P(X \in]-\infty, 10[\cup]10, +\infty[)$ (probabilité que l'abscisse du point d'impact soit supérieure à 10 ou inférieure à -10). $P(X \in]-\infty; 10[\cup]10; +\infty[) = 1 - P(X \in [-10; 10])$

Pour calculer $P(X \in [-10; 10])$*, on peut effectivement utiliser la calculatrice. Mais ici, on a l'occasion de montrer au correcteur qu'on connaît bien son cours. Pourquoi s'en priver ?*

D'après l'énoncé, l'espérance de X est $\mu = 0$ et son écart-type est $\sigma = 10$. Donc :
$P(X \in [-10; 10]) = P(X \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma])$.

Rappelons que lorsque X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ :
$P(X \in [\mu-\sigma; \mu+\sigma]) \approx 0,68 \quad P(X \in [\mu-2\sigma; \mu+2\sigma]) \approx 0,95 \quad P(X \in [\mu-3\sigma; \mu+3\sigma]) \approx 0,997$
C'est ce que certains appellent la règle des 3 sigmas.

Donc $P(X \in]-\infty; 10[\cup]10; +\infty[) = 1 - P(X \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]) \approx 1 - 0,68$.

Erratum : l'énoncé demande une probabilité arrondie au millième. Alors soit vous connaissez les trois valeurs de la règle des 3 sigmas au millième près (bravo), soit... Calculatrice. Il est dommage de la part de l'énoncé de passer à côté d'une occasion de vous faire utiliser cette règle, plutôt que de vous faire utiliser bêtement la calculette, mais bon..

La probabilité que le point d'impact soit situé hors de la bande grisée est d'environ $0,317$.

2) On cherche à déterminer la valeur x telle que $P(-x \leq X \leq x) = 0,6$.

De mémoire, InvNormale pour la TI, InvN pour la Casio, mais vous connaissez votre calculatrice mieux que moi. Il faut rentrer les paramètres $\mu = 0$ et $\sigma = 10$. Si, par chance, votre calculatrice possède l'option " centrée ", vous obtiendrez directement le résultat en rentrant 0,6 pour l'aire.

Si votre calculatrice ne vous permet que de calculer a tel que $P(X \leq a)$, il suffit d'écrire ce qui suit : $P(-x \leq X \leq x) = 1 - P(X > x) - P(X < x) = 1 - 2P(X < x)$ par symétrie. Dès lors, $P(-x \leq X \leq x) = 1 - 2P(X \leq x)$ $(P(X < x)$ et $P(X \leq x)$, c'est pareil pour une loi à densité). On cherche donc x tel que $1 - 2P(X \leq x) = 0,6$, c-à-d tel que $P(X \leq x) = \dfrac{1-0,6}{2} = 0,2$. Vous pourrez alors trouver x à la calculatrice. La calculatrice donne $x \approx 8,416$.

Afin que, lorsque la flèche atteint le plan, son point d'impact soit situé à l'intérieur de la bande avec une probabilité égale à $0,6$, on rétrécit la bande grisée de telle sorte qu'elle aille des abscisses $\boxed{-8,416 \text{ à } 8,416}$.

Partie C

1) T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$.
Donc $P(T \geq 2000) = e^{-\lambda \times 2000} = e^{-10^{-4} \times 2000} = e^{-0,2} \approx 0,819$

La probabilité que le panneau fonctionne au moins pendant 2 000 heures est d'environ $0,819$.

2)a) *Les questions du style " démontrer que F est une primitive de f " sont super sympa, il suffit de dériver F et retrouver f...*

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée et produit de fonctions dérivables.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F'(t) = -1 \times e^{-\lambda t} + \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right)(-\lambda e^{-\lambda t}) = -e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t} = f(t)$$

On en conclut que F est bien une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.

2)b) $$\mathrm{E}(T) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} \left[F(t)\right]_0^x = \lim_{x \to +\infty} F(x) - F(0).$$

D'où : $$\mathrm{E}(T) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\lambda x} - \left(-0 - \frac{1}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-0} = \lim_{x \to +\infty} -xe^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$$

$\lambda > 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -\lambda x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda} = 0$ par composition.

Enfin, $\lim\limits_{x \to +\infty} -xe^{-\lambda x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{\lambda} \times (\lambda x) e^{-\lambda x} = -\dfrac{1}{\lambda} \lim\limits_{X \to +\infty} X e^{-X}$ (en posant $X = \lambda x$)

D'où, par croissance comparée : $\lim\limits_{x \to +\infty} -xe^{-\lambda x} = 0$.

Par somme de limites, on obtient : $\mathrm{E}(T) = \dfrac{1}{\lambda}$. L'espérance de durée de vie du panneau électrique est donc $\boxed{\mathrm{E}(T) = \dfrac{1}{10^{-4}} = 10^4 \text{ heures.}}$ *Convertissez en jours si ça vous chante...*

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com