Suites, intégrales, et factorielles

Ayoub Hajlaoui

Fait-il peur à ce point, ce point d'exclamation ?
Il faut lire avec soin sa signification.

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure 10 min) *Centres étrangers - Pondichéry, juin 2019*

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_1 et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par la relation :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

Partie A

1. Vérifier, en détaillant le calcul, que si $u_1 = 0$ alors $u_4 = -17$.
2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'en saisissant préalablement dans U une valeur de u_1 il calcule les termes de la suite (u_n) de u_2 à u_{13}.

```
Pour N allant de 1 à 12
        U ←
Fin Pour
```

3. On a exécuté cet algorithme pour $u_1 = 0,7$ puis pour $u_1 = 0,8$.
   Voici les valeurs obtenues.

Pour $u_1 = 0,7$	Pour $u_1 = 0,8$
0,4	0,6
0,2	0,8
$-0,2$	2,2
-2	10
-13	59
-92	412
-737	3 295
$-6\ 634$	29 654
$-66\ 341$	296 539
$-729\ 752$	3 261 928
$-8\ 757\ 025$	39 143 135
$-113\ 841\ 326$	508 860 754

   Quelle semble être la limite de cette suite si $u_1 = 0,7$? Et si $u_1 = 0,8$?

Partie B

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

On rappelle que le nombre e est la valeur de la fonction exponentielle en 1, c'est-à-dire que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$.

1. Prouver que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $F(x) = (-1-x)\mathrm{e}^{1-x}$ est une primitive sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$.
2. En déduire que $I_1 = \mathrm{e} - 2$.
3. On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

   Utiliser cette formule pour calculer I_2.
4. (a) Justifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant x^n\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n\mathrm{e}$.
   (b) Justifier que : $\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{e}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
   (d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Partie C

Dans cette partie, on note $n\,!$ le nombre défini, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par : $1\,!$=1
$2\,!= 2 \times 1$
et si $n \geqslant 3$: $n\,! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$
On a ainsi par exemple
$3\,! = 3 \times 2 \times 1 = 3 \times (2 \times 1) = 3 \times 2\,!$
$4\,! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times (3 \times 2 \times 1) = 4 \times 3\,!$
$8\,! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8 \times (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 8 \times 7\,!$
Et, plus généralement :

$$(n+1)\,! = (n+1) \times n\,!$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_n = n\,!\,(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n.$$

   On rappelle que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{ et } I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

2. On admet que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,! = +\infty$.
   (a) Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0,7$.
   (b) Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0,8$.

Correction :

Partie A

1) *Ne restez pas une heure à vous demander qui est u_0 pour une suite qui commence avec u_1...* Si $u_1 = 0$, $u_2 = 2u_1 - 1 = 2 \times 0 - 1 = -1$. $u_3 = 3u_2 - 1 = 3(-1) - 1 = -4$, et enfin $u_4 = 4u_3 - 1 = 4(-4) - 1$. On a bien : $\boxed{u_4 = -17}$

2) *Pas de grosse difficulté dans cette question d'algorithmique relativement simple...*

```
Pour N allant de 1 à 12
        U ← (N + 1)U − 1
Fin Pour
```

Il faut juste faire attention au premier calcul qui va se faire. L'énoncé nous dit qu'avant exécution, $U = 0$ (ce qui correspond à u_1). Le prochain qu'on veut est u_2, sachant $u_2 = 2u_1 - 1$. Donc pour le premier calcul de la boucle, il faut : $U \leftarrow 2U - 1$, ce qui est bien le cas pour $N = 1$.

Tout ça pour vous dire que, par exemple, si l'énoncé vous avait imposé " Pour N allant de 2 à 13 ", il aurait fallu mettre " $U \leftarrow NU - 1$ " au lieu de " $U \leftarrow (N + 1)U - 1$ "...

3) $\boxed{\text{Si } u_1 = 0,7,\ (u_n) \text{ semble tendre vers } -\infty. \text{ Et si } u_1 = 0,8,\ (u_n) \text{ semble tendre vers } +\infty.}$

Partie B

1) *Ce genre de question bien sympa, soi-disant du chapitre " primitives ", mais où il faut juste dériver...*

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0\ ;\ 1]$ par composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in [0\ ;\ 1]$, $F(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = (-1 - x)$, d'où $u'(x) = -1$, et $v(x) = e^{1-x}$, d'où $v'(x) = -e^{1-x}$ *(dérivation de $e^{f(x)}$)*

Donc : $\forall x \in [0\ ;\ 1]$, $F'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -e^{1-x} + (-1 - x)(-e^{1-x})$

$F'(x) = -e^{1-x} + (1 + x)e^{1-x} = e^{1-x}(-1 + 1 + x) = xe^{1-x} = f(x)$

$\boxed{F \text{ est bien une primitive de } f \text{ sur } [0\ ;\ 1]}$

2) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x^1 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est une fonction continue de primitive F sur $[0\ ;\ 1]$.

Donc $I_1 = \Big[F(x)\Big]_0^1 = F(1) - F(0) = (-1 - 1)e^{1-1} - (-1 - 0)e^{1-0} = -2e^0 + 1e^1$

On en conclut : $\boxed{I_1 = e - 2.}$

3) *Ils vous font de ces cadeaux...* $I_2 = 2I_1 - 1 = 2(e - 2) - 1 = 2e - 4 - 1$. $\boxed{\text{Donc } I_2 = 2e - 5.}$

4)a) *Beaucoup d'élèves ont cette impression bizarre que ce serait un sacrilège de disséquer un encadrement, de le découper en deux pour démontrer les deux inégalités qui le composent. Si, si, vous avez le droit...*

$\forall x \in [0\ ;\ 1]$, $\forall n \geq 1$, $x^n \geq 0$ et $e^{1-x} > 0$ donc $0 \leq x^n e^{1-x}$.

Pour la seconde moitié de l'encadrement, il faut juste se demander ce qui change d'un terme à l'autre...

$e = e^1$. Or, $\forall x \in [0\ ;\ 1]$, $1 - x \leq 1$. Donc, par croissance de la fonction exponentielle : $e^{1-x} \leq e^1 = e$. En multipliant cette inégalité par $x^n \geq 0$, on obtient finalement :

$\boxed{\forall x \in [0\ ;\ 1],\ \forall n \geq 1,\ 0 \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant x^n e}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

4)b) *Fausse difficulté. Il faut identifier ce qui vous gêne. Vous savez (j'espère) primitiver x^n. C'est juste le e qui gâche (très légèrement) la fête. Excluons-le donc tout simplement de ladite fête...*

$\int_0^1 x^n e \, dx = e \int_0^1 x^n \, dx$ par linéarité. Donc $\int_0^1 x^n e \, dx = e \times \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = e(\frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1})$

Attention aux dingueries du genre : " je remplace n par 1 et 0...

Finalement, on obtient : $\boxed{\int_0^1 x^n e \, dx = \frac{e}{n+1}}$

4)c) *Un petit peu téléphoné, non ?*

En intégrant sur $[0\ ;\ 1]$ l'encadrement obtenu en B-4a) (positivité de l'intégrale), on obtient : $\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} \, dx \leq \int_0^1 x^n e \, dx$. Autrement dit (d'après B-4b) : $\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}}$

4)d) *Ultra-classique, on demande de démontrer un encadrement, puis on demande une limite...*

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$. De l'encadrement obtenu en B-4)c), on peut donc conclure : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$

Partie C

Les choses sérieuses commencent - ou du moins ont l'air de commencer.

1) *J'aurais volontiers écouté sérieusement les plaintes relatives à la difficulté si on ne vous donnait pas l'indication de la récurrence (et encore, vous auriez pu essayer).*

Ah, et prudence quant au rang initial pour lequel vous devez démontrer l'égalité...

Montrons par récurrence sur n : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n\,!(u_1 - e + 2) + I_n$

Initialisation : $1\,!(u_1 - e + 2) + I_1 = 1(u_1 - e + 2) + e - 2$ (d'après B-2). Donc $1\,!(u_1 - e + 2) + I_1 = u_1$. La propriété est initialisée au rang 1.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier $n \geq 1$, $u_n = n\,!(u_1 - e + 2) + I_n$.
Et montrons : $u_{n+1} = (n+1)\,!(u_1 - e + 2) + I_{n+1}$
On sait : $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a alors :
$u_{n+1} = (n+1)\Big[n\,!(u_1 - e + 2) + I_n\Big] - 1 = (n+1) \times n\,!(u_1 - e + 2) + (n+1)I_n - 1$
Or, d'une part, $(n+1) \times n\,! = (n+1)\,!$ et d'autre part : $(n+1)I_n - 1 = I_{n+1}$
Donc $u_{n+1} = (n+1)\,!(u_1 - e + 2) + I_{n+1}$. La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure :
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n\,!(u_1 - e + 2) + I_n}$

2)a) D'après l'énoncé, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,! = +\infty$

Il faut maintenant nous intéresser au signe de $u_1 - e + 2$, qui sera déterminant pour la limite de $n\,!(u_1 - e + 2)$

Si $u_1 = 0,7$: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n\,!(0,7 - e + 2) + I_n = n\,!(2,7 - e) + I_n$. Or, $2,7 < e < 2,8$.
Donc $2,7 - e < 0$. D'où, par produit de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,!(2,7 - e) = -\infty$

De plus, d'après B-4)c), $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. Par somme de limites, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty.}$

Si $u_1 = 0,8$: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n\,!(0,8 - e + 2) + I_n = n\,!(2,8 - e) + I_n$ avece $< 2,8$.
Donc $2,8 - e > 0$. D'où, par produit de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,!(2,7 - e) = +\infty$. Par somme de limites, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$ *Et ces résultats sont cohérents avec les conjectures faites en A-3.*