Télescopage

Ayoub Hajlaoui

Le nez dans les étoiles, il attend d'un œil sage
Que leur danse dévoile un franc télescopage.

Énoncé :

Démontrer : $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{4}$

Correction :

L'idée est d'écrire $\frac{1}{(k-1)k(k+1)}$ *comme différence de deux termes successifs d'une suite, c-à-d sous forme* $u_{k+1} - u_k$*. Il s'agit ici d'écrire* $\frac{1}{(k-1)k(k+1)}$ *sous forme de somme/différence de fractions simples, en espérant retomber sur une forme* $u_{k+1} - u_k$*.*

Cherchons α, β et γ tels que

$$\forall k \geq 2, \quad \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{\alpha}{k-1} + \frac{\beta}{k} + \frac{\gamma}{k+1} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{k-1} + \frac{\beta}{k} + \frac{\gamma}{k+1} &= \frac{\alpha k(k+1)}{(k-1)k(k+1)} + \frac{\beta(k-1)(k+1)}{(k-1)k(k+1)} + \frac{\gamma(k-1)k}{(k-1)k(k+1)} \\ &= \frac{\alpha k(k+1) + \beta(k-1)(k+1) + \gamma(k-1)k}{(k-1)k(k+1)} \\ &= \frac{(\alpha+\beta+\gamma)k^2 + (\alpha-\gamma)k - \beta}{(k-1)k(k+1)} \end{aligned}$$

Si on veut que la condition (1) soit respectée, on doit avoir (par identification) :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha - \gamma &= 0 \\ -\beta &= 1 \end{aligned}$$

Autrement dit, :

$$\begin{aligned} 2\alpha - 1 &= 0 \\ \gamma &= \alpha \\ \beta &= -1 \end{aligned}$$

On obtient donc $\underline{\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = -1,\ \gamma = \frac{1}{2}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

On en conclut donc l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
\forall k \geq 2, \quad \frac{1}{(k-1)k(k+1)} &= \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{k} + \frac{1}{2(k+1)} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1}\Big) \\
\textit{(et là, il faut s'efforcer} &\textit{ de voir quelque chose...)} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\big) - \big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\big)\Big)
\end{aligned}$$

Ca y est ! On a ce qu'on veut !

En posant, pour tout entier $k \geq 2$,

$$\begin{aligned}
u_k &= \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \\
\text{on obtient } \frac{1}{(k-1)k(k+1)} &= \frac{1}{2}(u_k - u_{k+1}) \\
\text{En passant à la somme, } \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-1)k(k+1)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{N}(u_k - u_{k+1})
\end{aligned}$$

C'est là qu'il va y avoir télescopage. On peut le formuler de deux façons :

- ***la formulation "mathématique" :***

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-1)k(k+1)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{N}(u_k - u_{k+1}) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=2}^{N} u_k - \sum_{k=2}^{N} u_{k+1}\Big) \quad \text{(par linéarité)} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=2}^{N} u_k - \sum_{k=3}^{N+1} u_k\Big) \quad \text{(changement de variable)} \\
&= \frac{1}{2}\Big(u_2 + \sum_{k=3}^{N} u_k - \sum_{k=3}^{N} u_k - u_{N+1}\Big) \\
&= \frac{1}{2}(u_2 - u_{N+1}) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1}\Big) \\
\text{Donc } \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-1)k(k+1)} &\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} \\
\text{On en conclut } \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)k(k+1)} &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

- ***la formulation "visuelle" :***

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-1)k(k+1)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{N}(u_k - u_{k+1}) = \frac{1}{2}(u_2 - u_3 + u_3 - u_4 + ... + u_N - u_{N+1}) \\
&= \frac{1}{2}(u_2 - u_{N+1}) \quad \text{par télescopage des termes de la somme}
\end{aligned}$$

Et on continue comme pour la formulation mathématique, en utilisant la définition des termes de la suite (u_n).

La seconde formulation est plus rapide, mais la première a le mérite de vous faire manipuler les sommes. Choisissez celle qui vous convient, et n'hésitez pas à utiliser la seconde si vous avez peur de vous tromper à la première.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com