Noyaux et images des composées p-ièmes

Ayoub Hajlaoui

L'image et le noyau des composées p-ièmes
Sont les savants joyaux de ce petit poème.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $f^p = f \circ f \circ .. \circ f$ (f composée p fois).
Par convention, f^0 est l'application identité.
On pose $K_p = \mathrm{Ker} f^p$ et $I_p = \mathrm{Im} f^p$.

Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall p \geq p_0,\ \ K_p = K_{p_0}$ et $I_p = I_{p_0}$.

Correction :

Rappelons (ou remarquons) : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker} f^p \subset \mathrm{Ker} f^{p+1}$ et $\mathrm{Im} f^{p+1} \subset \mathrm{Im} f^p$. En effet :
Soit $x \in \mathrm{Ker} f^p$. $f^p(x) = 0$ et $f^{p+1}(x) = f(f^p(x)) = f(0) = 0$, d'où $x \in \mathrm{Ker} f^{p+1}$.
Donc $\underline{\mathrm{Ker} f^p \subset \mathrm{Ker} f^{p+1}}$
Soit $y \in \mathrm{Im} f^{p+1}$. Par définition : $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f^{p+1}(x)$. Autrement dit, $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f^p(f(x))$. y est donc l'image par f^p de $f(x)$. D'où $y \in \mathrm{Im} f^p$
Donc $\underline{\mathrm{Im} f^{p+1} \subset \mathrm{Im} f^p}$
Ces deux résultats immédiats et leur démo simple sont à connaître, et il est bon de les avoir à fleur de stylo pour les exercices faisant intervenir de telles composées.

On nous demande de montrer que les suites de sous-espaces vectoriels (K_p) *et* (I_p) *sont constantes à partir d'un certain rang. Nos connaissances en termes de suites d'ensembles étant limitées, si seulement on pouvait se ramener à des suites de réels... Et si on s'intéressait aux dimensions de ces espaces vectoriels ?*

Nous venons de démontrer : $\forall p \in \mathbb{N},\ K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$
On a donc : $\forall p \in \mathbb{N},\ \dim(K_p) \leq \dim(K_{p+1})$ et $\dim(I_{p+1}) \leq \dim(I_p)$
Autrement dit, la suite $(\dim(K_p))$ est croissante (et la suite $(\dim(I_p))$ est décroissante).
Mmm... Et cette suite $(\dim(K_p))$ *ne serait-elle pas majorée, par hasard ?*

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, K_p est-un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (qui est de dimension n). Donc $\dim(K_p) \leq n$. La suite $(\dim(K_p))$ est donc majorée (par n).

Puisqu'elle est croissante et majorée, la suite $(\dim(K_p))$ converge.
Et c'est une suite d'entiers naturels...

Or, toute suite d'entiers qui converge est en fait stationnaire (constante à partir d'un certain rang). *En fonction du contexte, vous aurez ou non à démontrer ce résultat. Par exemple, à l'oral, il faut être capable de le faire sur demande. Voici une démonstration ci-dessous.*
Soit (u_p) une suite d'éléments de $\mathbb{Z}$ convergeant vers une certaine limite l. On a, par définition : $\forall \epsilon > 0\ , \exists N_\epsilon\ , \forall p \geq N_\epsilon\ , |u_p - l| \leq \epsilon$. En prenant par exemple $\epsilon = \dfrac{1}{4}$, il nous est donc garanti ce

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

qui suit : il existe un entier $N_{\frac{1}{4}}$ tel que pour tout $p \geq N_{\frac{1}{4}}, \ |u_p - l| \leq \frac{1}{4}$.
Pour tout entier $p \geq N_{\frac{1}{4}}$, on a donc : $l - \frac{1}{4} \leq u_p \leq l + \frac{1}{4}$.
À partir du rang $N_{\frac{1}{4}}$, les u_p sont donc des entiers naturels compris dans un intervalle de longueur $\frac{1}{2}$ (intervalle ne pouvant donc contenir au plus qu'un entier).
La suite (u_p) est donc bien constante à partir d'un certain rang.
Si c'est au programme de votre filière, vous pouviez aussi dire que la suite (u_p) *converge donc est une suite de Cauchy, et passer par la définition de suite de Cauchy pour montrer que les* (u_p) *sont tous égaux à partir d'un certain rang.*

On a donc montré l'existence d'un rang p_0 tel que : $\underline{\forall p \geq 0, \ \dim(K_p) = \dim(K_{p_0})}$.

De plus, $\forall p \in \mathbb{N}, \ K_p \subset K_{p+1}$. On obtient donc (par transitivité de la relation d'inclusion) : $\underline{\forall p \geq p_0, \ K_{p_0} \subset K_p}$

Rappelons que si A *et* B *sont deux espaces vectoriels de même dimension avec* $A \subset B$*, alors* $A = B$.

On peut donc en conclure : $\boxed{\forall p \geq p_0, \ K_p = K_{p_0}}$

Oulala, devons-nous faire le même travail avec les I_p *? Pas si on exploite un lien intéressant entre les* K_p *et les* I_p*...*

Nous savons déjà : $\forall p \in \mathbb{N}, \ I_{p+1} \subset I_p$. D'où : $\underline{\forall p \geq p_0, \ I_p \subset I_{p_0}}$ *Oui oui, le même* p_0

Par ailleurs, le théorème du rang nous donne : $\forall p \in \mathbb{N}, \ \dim(K_p) + \dim(I_p) = n$
Donc : $\forall p \geq p_0, \ \dim(I_p) = n - \dim(K_p) = n - \dim(K_{p_0}) = \dim(I_{p_0})$ (encore le théorème du rang)
Autrement dit : $\underline{\forall p \geq p_0, \ \dim(I_p) = \dim(I_{p_0})}$

De même que précédemment, on peut en conclure : $\boxed{\forall p \geq p_0, \ I_p = I_{p_0}}$

On a bien montré : $\boxed{\exists p_0 \in \mathbb{N}, \ \forall p \geq p_0, \ \forall p \geq p_0, \ \ K_p = K_{p_0} \text{ et } I_p = I_{p_0}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com