Séries et Cauchy-Schwarz

Ayoub Hajlaoui

" Voici en vérité la question assassine :
Où l'inégalité trouve-t-elle racine ? "

Énoncé :

Soit (u_n) une suite positive telle que la série de terme général u_n converge. On pose $v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}$.
1) Montrer que si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.
2) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que la série de terme général v_n est divergente.
On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\sum_{k=0}^{n} u_k v_k \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n} v_k^2}$

Correction :

1) *Dès qu'on me donne une indication, je dois savoir quand l'utiliser. A vue d'oeil, avec toutes ces racines, l'inégalité de Cauchy-Schwarz servirait bien à la question 1... De plus, si je veux montrer la convergence de* $\sum \sqrt{u_n v_n}$ *et que je pense me servir d'une égalité, il faut que je réussisse à comparer cette somme avec celle d'une série que je sais convergente...*

Prudence, toutefois. Si je veux travailler à la majoration d'une somme dont je n'ai pas encore prouvé (ou ne sais pas encore) la convergence, j'utiliserai sa somme partielle. C'est d'ailleurs fortement suggéré par l'indication, qui elle-même utilise les sommes partielles.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \sqrt{u_k v_k} = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{u_k}\sqrt{v_k} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} (\sqrt{u_k})^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n} (\sqrt{v_k})^2} \quad \text{(cf l'indication)}$$

$$\text{Donc} \quad \sum_{k=0}^{n} \sqrt{u_k v_k} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}\sqrt{\sum_{k=0}^{n} v_k} \quad (*)$$

Or, les séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont deux séries à termes positifs convergentes.

$$\text{Donc} \quad \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k} \quad \text{et} \quad \sqrt{\sum_{k=0}^{n} v_k} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} v_k}$$

D'après $(*)$, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \sqrt{u_k v_k} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k}\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} v_k}$$

On a donc réussi à majorer la somme partielle de la série à termes positifs $\sum \sqrt{u_k v_k}$ par un certain réel $\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k}\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} v_k}$.

Or, la somme partielle d'une série à termes positifs n'a que deux possibilités : tendre vers $+\infty$ (auquel cas la série diverge), ou converger.

On a réussi à majorer la somme partielle de $\sum \sqrt{u_n v_n}$: on peut en conclure que $\boxed{\text{cette série converge.}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

2) *Le plus dur ayant été fait, il serait dommage de bloquer à ce stade.*

La question 1 nous a permis de prouver l'implication :
$\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.

On nous demande de prouver par l'absurde que $\sum v_n$ diverge.

Supposons donc que $\sum v_n$ converge (en espérant aboutir à une contradiction ou une absurdité).

On sait alors que $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge d'après la question 1.

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}$. Comme on a supposé la convergence de $\sum v_n$, cela implique $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (avec $v_n \geq 0$)

Donc $1 + n^2 u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc $\underline{n^2 u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$

Revenons maintenant à $\sqrt{u_n v_n}$:
$\sqrt{u_n v_n} = \sqrt{\frac{u_n}{1+n^2 u_n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{u_n}{n^2 u_n}}$ *(ben oui, vu ce qu'on a souligné juste en haut...)*

Donc $\sqrt{u_n v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{n^2}}$

Autrement dit, $\sqrt{u_n v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

La série à termes positifs $\sum \frac{1}{n}$ diverge (cf série de Riemann avec $\alpha = 1$) et la série à termes positifs $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge. Et leurs termes généraux sont équivalents en $+\infty$. Absurde, bien entendu.

On en conclut donc que la supposition "$\sum v_n$ converge" était fausse. $\boxed{\text{Donc } \sum v_n \text{ diverge.}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com