Croissance, décroissance, continuité

Ayoub Hajlaoui

Il y a continuité. Pour en prendre conscience,
En inégalités traduisez la croissance.

Énoncé : (temps conseillé : 20 min)

Soit $f\ :\ ]0\ ;\ +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. On suppose que la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante. Montrer que f est continue.

Correction :

L'énoncé peut intriguer à première vue. Comment s'aider des informations de croissance et décroissance pour montrer une continuité ?
D'une part, la continuité fait intervenir la notion de limite. D'autre part, la croissance et la décroissance font intervenir des inégalités. Comment trouver un terrain d'entente entre les deux ? En s'intéressant aux limites à gauche et à droite..

On veut montrer : $\forall a>0,\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Soit $a\in\ ]0\ ;\ +\infty[$.
f est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ et g est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

On a donc, d'une part : $\underline{\forall x>a}$, $\ f(x)\geq f(a)$ et $g(x)\leq g(a)$.
La seconde inégalité se traduit par : $\dfrac{f(x)}{x}\leq\dfrac{f(a)}{a}$. En la multipliant par $x>0$, on obtient : $f(x)\leq\dfrac{x}{a}\times f(a)$. Donc : $\forall x>a, f(a)\leq f(x)\leq\dfrac{x}{a}\times f(a)$.
Or, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{a}\times f(a)=f(a)$.

Le théorème des gendarmes nous permet de conclure : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$
Attention, il s'agit bien de la limite à droite en a et pas encore de la limite en a, puisque ce que nous avons écrit n'est valable que pour $x>a$

D'autre part : $\underline{\forall x<a}$, $\ f(x)\leq f(a)$ et $g(x)\geq g(a)$ (toujours par croissance de f et décroissance de g).
La seconde inégalité se traduit par : $\dfrac{f(x)}{x}\geq\dfrac{f(a)}{a}$. En la multipliant par $x>0$, on obtient : $f(x)\geq\dfrac{x}{a}\times f(a)$. Donc : $\forall x>a, f(a)\geq f(x)\geq\dfrac{x}{a}\times f(a)$.
Or, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{a}\times f(a)=f(a)$.

Le théorème des gendarmes nous permet cette fois de conclure : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$
On a prouvé : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$. On peut donc en conclure : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.
f est donc continue en tout $a>0$. Finalement, $\boxed{f \text{ est continue sur }]0\ ;\ +\infty[.}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com