Fermeture des polynômes unitaires scindés de $\mathbb{R}_n[X]$

Ayoub Hajlaoui

Tous les taupins en tremblent ! Scindés et unitaires,
Fermés dans leur ensemble, soudés et solidaires.

Énoncé : (temps conseillé : 45 min)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle H_n l'ensemble des polynômes unitaires scindés de $\mathbb{R}_n[X]$.

1) Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}_n[X]$ .Montrer que P appartient à H_n si et seulement si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n$.

2) En déduire que H_n est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction :

1) Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}_n[X]$.

Si $P \in H_n$, c'est-à-dire si P est <u>unitaire</u> scindé de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe $a_1, a_2, ...a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(z - a_k)$. *Les a_k ne sont pas forcément distincts.*

D'où : $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| = \left|\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(z - a_k)\right| = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}|z - a_k|$. *Et si on faisait apparaître* $\mathrm{Im}(z)$?

$|P(z)| = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}|z - a_k| = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}|\mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z) - a_k|$. *N'oublions pas que les a_k sont réels !*

Rappelons que pour tout complexe Z, $|Z| \geq |\mathrm{Im}(Z)|$

Or : $\forall k \in [|1\ ;\ n|],\ \mathrm{Im}\big(\mathrm{Re}(z) - a_k + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)\big) = \mathrm{Im}(z)$. Donc : $|\mathrm{Re}(z) - a_k + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|$

On obtient alors (produit d'inégalités à membres positifs) : $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq \displaystyle\prod_{k=1}^{n}|\mathrm{Im}(z)|$

Autrement dit, on a l'inégalité suivante pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n$

Réciproquement, si, pour tout z $\in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n$, montrons que P est un polynôme scindé de $\mathbb{R}_n[X]$.

Comme tout polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$, P est scindé sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe $a_1,\ a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(z - a_k)$ *(P est unitaire donc de coefficient dominant 1)*

Pour montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que toutes ses racines $a_1, a_2, ..., a_n$ sont réelles.

Soit a une racine de P. Appliquons à a l'inégalité vraie pour tout complexe z : $|P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n$.

On obtient $|P(a)| \geq |\mathrm{Im}(a)|^n$. Mais $P(a) = 0$. Donc $|\mathrm{Im}(a)|^n \leq 0$. Donc $\mathrm{Im}(a) = 0$, d'où $a \in \mathbb{R}$.

Les racines de P sont donc toutes réelles.

Autrement dit, P est défini par : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(z - a_k)$ où les a_k sont réels. Donc $P \in H_n$.

On a bien montré, pour tout polynôme unitaire P de $\mathbb{R}_n[X]$, l'équivalence suivante :

$\boxed{P \in H_n \Longleftrightarrow \forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

2) Soit U l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}_n[X]$.
Soit $E = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n\right\}$

On a alors : $H_n = U \cap E$.

Attention à ne pas confondre H_n et E... Dans la définition de E, il manque la condition "unitaire".

Montrons que E est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.
$E = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| - |\mathrm{Im}(z)|^n \geq 0\right\}$
Pour un certain $z \in \mathbb{C}$, notons ϕ_z l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi_z(P) = |P(z)| - |\mathrm{Im}(z)|^n$. Remarquons alors : $E = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} \phi_z^{-1}\big([0\ ;\ +\infty[\big)$
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'application ϕ_z est continue par composée et somme d'applications continues. (Notamment, Im est continue sur $\mathbb{C}$ car linéaire avec $\mathbb{C}$ de dimension finie, et $P \mapsto P(z)$ est continue sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour les mêmes raisons)
$[0\ ;\ +\infty[$ étant un fermé de $\mathbb{R}$, on en conclut que pour tout complexe z, $\phi_z^{-1}\big([0\ ;\ +\infty[\big)$ est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$ *(image réciproque d'un fermé par une application continue).*
Puis, par intersection (quelconque) de fermés, E est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.

Maintenant, montrons que U est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.
L'idée serait aussi de trouver une application continue par laquelle U serait l'image réciproque d'un fermé. Mais trouver une telle application n'est pas évident.. Par contre, pour un degré $k \leq n$ fixé, on peut plus facilement montrer que U_k, ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}_n[X]$ de degré k, est un fermé...
Pour $k \in [|0\ ;\ n|]$, soit U_k l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}_n[X]$ de degré k.
Soit f_k l'application de $\mathbb{R}_k[X]$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$ associe son coefficient devant X^k. f_k est évidemment linéaire sur $\mathbb{R}_k[X]$ donc continue (dimension finie).
Remarquons : $U_k = f_k^{-1}(\{1\})$, avec $\{1\}$ fermé de $\mathbb{R}$. Donc U_k est un fermé de $\mathbb{R}_k[X]$ (et donc de $\mathbb{R}_n[X]$ qui contient $\mathbb{R}_k[X]$).
En notant N le polynôme nul, on a $U = \{N\} \cup \bigcup_{k=0}^{n} U_k$. *(par convention, N est de degré $-\infty$)*
Par union finie de fermés, U est donc un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.

Notez que la fonction f qui à un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ associe son coefficient dominant n'est pas linéaire... $f(X^3 + X^2) = 1$ et $f(X^3) + f(X^2) = 2$...
Voilà pourquoi nous avons dû passer par les f_k.

En tant qu'intersection des deux fermés E et U, nous pouvons donc conclure ce qui suit :
$\boxed{H_n \text{ est un fermé de } \mathbb{R}_n[X].}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com