Identité remarquable et matrices symétriques

Ayoub Hajlaoui

Les torts sont substantiels dans les écrits hâtifs ;
Le produit matriciel n'est point commutatif.

Énoncé : (temps conseillé : 5 à 10 min)

Soient A et B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
Montrer que AB est symétrique.

Correction :

Cet exercice est relativement simple. L'égalité donnée par l'énoncé sert juste à déstabiliser les plus imprudents, qui ne voient pas en quoi ça les avance de savoir que $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$. Ils auraient presque envie de rétorquer à l'énoncé : " nous connaissons nos identités remarquables, merci bien ! " Ils auraient tort.

Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A\times A + A\times B + B\times A + B\times B = A^2 + AB + BA + B^2$
De plus, par hypothèse : $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Le produit matriciel n'étant pas commutatif, l'identité remarquable n'est pas vraie en général. Elle est vraie ici par hypothèse.

On a donc : $AB + BA = 2AB$. Autrement dit, $BA = AB$ (les matrices A et B commutent).

Maintenant, comment montrer que AB est symétrique ? On notera ${}^tM$ la transposée de M. Rappelons qu'une matrice M est symétrique si et seulement si ${}^tM = M$

${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$. Or, les matrices A et B sont symétriques. Donc ${}^tB = B$ et ${}^tA = A$.
Donc ${}^t(AB) = BA$. De plus, on a montré précédemment : $BA = AB$.

Nous avons donc montré : ${}^t(AB) = AB$. En conclusion : $\boxed{\text{la matrice } AB \text{ est symétrique.}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com