Injectivité, surjectivité, bijectivité et composition

Ayoub Hajlaoui

Prisonniers de ce songe, par nos yeux nous errons :
Composées à rallonge, nous perdant dans les ronds.

Énoncé : (temps conseillé : 35 min)

Soient f et g deux applications d'un ensemble E dans lui-même. Soit id l'application identité de E dans lui-même.

1) Montrer que si f est injective et si $f \circ g = f$, alors $g = \mathrm{id}$

2) Montrer que si f est surjective et si $g \circ f = f$, alors $g = \mathrm{id}$

3) Montrer que si $f \circ g = id$, alors f est surjective et g est injective.

4) On supposera désormais que $f \circ g \circ f = g$, que $g \circ f \circ g = f$, et que f est injective ou surjective.

a) Montrer que $g \circ f \circ f \circ g = \mathrm{id}$, et en déduire que g est bijective.

b) Montrer que $g \circ g = f \circ f$. En déduire une expression simplifiée de $f \circ f \circ f \circ f$, et en conclure que f est bijective.

Correction :

1) Supposons f injective et que $f \circ g = f$.

On veut montrer que pour tout élément x de E, $g(x) = x$

On a $f \circ g = f$. Donc pour tout élément x de E, $f \circ g(x) = f(x)$.

Autrement dit, $f(g(x)) = f(x)$.

Or, f est injective. *(Autrement dit : $\forall a, b \in E, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$)*

Donc $g(x) = x$. Cela étant valable pour tout $x \in E$, on en conclut : $\boxed{g = \mathrm{id}}$

2) Supposons f surjective et que $g \circ f = f$.

Pour tout élément x de E, $g \circ f(x) = f(x)$. Autrement dit, $g(f(x)) = f(x)$.

Or, f est surjective, c'est-à-dire que tout élément de E admet un antécédent dans E par f.

Les ensembles de départ et d'arrivée sont le même dans cet exercice.

Il existe donc $x' \in E$ vérifiant $f(x') = x$.

Ce qui va guider mes pas, c'est comment me ramener à $g \circ f$ pour utiliser l'info dont je dispose.

$g \circ f(x') = f(x')$ (*) car $g \circ f = f$.

Or, $g \circ f(x') = g(f(x')) = g(x)$ (par définition de x'). De même, $f(x') = x$.

L'égalité (*) nous permet donc de conclure : $g(x) = x$.

Cela étant valable pour tout $x \in E$, on en conclut : $\boxed{g = \mathrm{id}}$

3) Supposons $f \circ g = \mathrm{id}$. Autrement dit, supposons : $\forall x \in E, f(g(x)) = x$

On constate donc que pour tout élément x de E, x a un antécédent par f, à savoir $g(x)$.

$\boxed{f \text{ est donc surjective.}}$

Maintenant, soient x_1 et x_2 deux éléments de E tels que $g(x_1) = g(x_2)$.

On a alors $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$, c'est-à-dire finalement : $x_1 = x_2$.

$\boxed{g \text{ est donc injective.}}$

4)a) Supposons que $f\circ g\circ f=g$ et que $g\circ f\circ g=f$.

Si f est injective : soit $x\in E$. On veut montrer : $g\circ f\circ f\circ g(x)=x$.
Pour utiliser l'injectivité de f, on a intérêt à ce que la dernière fonction par laquelle on compose (donc celle tout à gauche) soit f. Intéressons-nous donc à $f\circ g\circ f\circ f\circ g(x)$...
$f\circ g\circ f\circ f\circ g(x)=(f\circ g\circ f)\circ f\circ g(x)=g\circ f\circ g(x)$ par hypothèse. Or, $g\circ f\circ g(x)=f(x)$.
On a donc : $f\circ g\circ f\circ f\circ g(x)=f(x)$. Autrement dit : $f(g\circ f\circ f\circ g(x))=f(x)$.
Comme f est injective, on peut en conclure : $g\circ f\circ f\circ g(x)=x$. Cela étant valable pour tout élément x de E, on a bien établi : $g\circ f\circ f\circ g=\text{id}$

Si f est surjective : soit $x\in E$. On veut montrer (là aussi) : $g\circ f\circ f\circ g(x)=x$.
Par surjectivité de f, il existe $x'\in E$ vérifiant : $x=f(x')$.
On peut donc écrire $g\circ f\circ f\circ g(x)=g\circ f\circ f\circ g(f(x'))=g\circ f\circ f\circ g\circ f(x')=g\circ f\circ (f\circ g\circ f)(x')$
Par hypothèse, $f\circ g\circ f=g$. Donc d'après ce qui précède, $g\circ f\circ f\circ g(x)=g\circ f\circ g(x')$.
Par hypothèse, $g\circ f\circ g=f$. On arrive donc à $g\circ f\circ f\circ g(x)=f(x')=x$ (par définition de x').
On a bien établi : $g\circ f\circ f\circ g=\text{id}$.

En conclusion, si $f\circ g\circ f=g$, si $g\circ f\circ g=f$, et si f est injective ou surjective, on a : $\boxed{g\circ f\circ f\circ g=\text{id}.}$

Pour montrer que g est bijective, il suffit de montrer l'existence d'une application h de E dans lui-même telle que $h\circ g=g\circ h=\text{id}$. ($h$ est alors l'application réciproque de g)
Attention : trouver h vérifiant simplement $h\circ g=\text{id}$ (resp. $g\circ h=\text{id}$) ne suffit pas pour prouver que g est bijective. On vient de montrer : $g\circ f\circ f\circ g=\text{id}$. Autrement dit : $g\circ(f\circ f\circ g)=\text{id}$ et $(g\circ f\circ f)\circ g=\text{id}$. Malheureusement, on n'obtient pas directement $h\circ g=g\circ h=\text{id}$. Peut-être faut-il donc prouver la bijectivité autrement. À quelle autre voie pouvons-nous penser ? Montrer l'injectivité de g, puis sa surjectivité. C'est d'ailleurs la voie la plus classique (mais ici, nous avons été tentés de mettre directement en évidence la réciproque vu ce qui a été démontré précédemment).

On vient de montrer : $g\circ f\circ f\circ g=\text{id}$. Autrement dit : $g\circ(f\circ f\circ g)=\text{id}$ et $(g\circ f\circ f)\circ g=\text{id}$.
D'une part, $g\circ(f\circ f\circ g)=\text{id}$. Donc, d'après le résultat de la question 3, g est surjective *(et $f\circ f\circ g$ est injective, mais ça, on s'en fiche ici)*
D'autre part, $(g\circ f\circ f)\circ g=\text{id}$. Donc d'après le résultat de la 3, g est injective *(et $g\circ f\circ g$ est surjective, mais ça aussi, on s'en fiche ici)*
$\boxed{g \text{ est donc bijective.}}$

4)b) On a supposé $f\circ g\circ f=g$, donc en composant par g à gauche, on obtient :
$g\circ f\circ g\circ f=g\circ g$. Or, $g\circ f\circ g\circ f=(g\circ f\circ g)\circ f=f\circ f$. On a donc établi : $\boxed{g\circ g=f\circ f.}$

Par suite, $f\circ f\circ f\circ f=f\circ(f\circ f)\circ f=f\circ(g\circ g)\circ f=f\circ g\circ g\circ f$
Ce serait bien de composer par g (à droite ou à gauche) pour pouvoir utiliser une donnée de l'énoncé. En plus, g est bijective...
En composant par g à gauche, on obtient : $g\circ(f\circ f\circ f\circ f)=g\circ(f\circ g\circ g\circ f)$
Autrement dit : $g\circ(f\circ f\circ f\circ f)=(g\circ f\circ g)\circ g\circ f=f\circ g\circ f$ par hypothèse de l'énoncé.
Donc $g\circ(f\circ f\circ f\circ f)=g$ (encore par hypothèse).
g étant bijective, en composant par sa réciproque g^{-1} à gauche, on obtient : $f\circ f\circ f\circ f=g^{-1}\circ g$
En conclusion : $\boxed{f\circ f\circ f\circ f=\text{id}}$.

Autrement dit : $f\circ(f\circ f\circ f)=(f\circ f\circ f)\circ f=\text{id}$. En posant $h=f\circ f\circ f$, on a donc : $f\circ h=h\circ f=\text{id}$.
$\boxed{f \text{ est donc bien bijective}}$ (de réciproque $f^{-1}=f\circ f\circ f$)

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com