Un lambda pour les gouverner tous

Ayoub Hajlaoui

Entre il existe et quel que soit,
quel algébriste reste coi ?

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $\forall x \in E,\ \exists\ \lambda \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda x.$ (1)
Montrer qu'on a en fait : $\exists\ \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ u(x) = \lambda x.$ (2)

Correction :

Quelle est la différence entre notre supposition de départ (1) et celle que nous voulons démontrer (2) ? Contrairement à (2), qui stipule l'existence d'un λ qui soit le même pour tous les x, (1) n'empêche pas a priori que le λ dépende de x. (1) peut en fait se réécrire :
$\forall x \in E,\ \exists\ \lambda_x \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda_x x$ *(1)*
On serait alors tentés de montrer : $\forall x, y \in E,\ \lambda_x = \lambda_y$ (et on aura alors montré l'existence d'un lambda qui marche pour tous les vecteurs de E)
Mais le vecteur nul $\vec{0}$ de E risque de nous poser problème... En effet, pour ce vecteur , TOUS les lambdas marchent. Autrement dit : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ u(\vec{0}) = \lambda\vec{0}$ (u étant un endomorphisme, $u(\vec{0}) = \vec{0}$)
$\vec{0}$ risque donc de constituer une embûche sur notre chemin si nous voulons démontrer l'existence d'un lambda qui marche pour tout le monde. Mais alors, que faire ?
Il suffit d'exclure $\vec{0}$ pour l'instant. Si on arrive à prouver l'existence d'un lambda qui marche pour tous les vecteurs non nuls de E, ce lambda marchera aussi pour $\vec{0}$, et on aura alors prouvé l'existence d'un lambda qui marche pour tout le monde !

Supposons (1). Pour tout vecteur x non nul de E, λ_x est défini de manière unique. En effet, s'il existe deux éléments λ_1 et λ_2 de $\mathbb{K}$ tels que $u(x) = \lambda_1 x = \lambda_2 x$, on a alors $(\lambda_2 - \lambda_1)x = \vec{0}$ avec x nul. Donc $\lambda_2 = \lambda_1$.

Montrons : $\forall x, y \in E^*,\ \lambda_x = \lambda_y$

Deux cas paraissent utiles à distinguer : le cas où x et y sont colinéaires, et le cas où ils ne le sont pas...

Si x et y sont colinéaires, ils sont deux vecteurs propres colinéaires de l'endomorphisme u, et font donc partie du même sous-espace propre. Autrement dit, ils sont donc associés à la même valeur propre. C'est-à-dire : $\lambda_x = \lambda_y$

Que faire dans le cas où ils ne sont pas colinéaires ? Considérons par exemple leur somme, afin de pouvoir jouer du caractère linéaire de u...
Si x et y ne sont pas colinéaires, on a $u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ d'une part (par linéarité de u et définition de λ_x et λ_y), et $u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$ d'autre part (déf. de λ_{x+y}). D'où l'égalité suivante : $\lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y}(x+y)$. Autrement dit : $\lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y$, ou encore : $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = \vec{0}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Or, la famille $\{x, y\}$ est libre car elle est composée de deux vecteurs non colinéaires.
(Bien évidemment, cet argument n'est pas valable pour une famille de plus de deux vecteurs...)
L'égalité précédente donne donc $\lambda_{x+y} - \lambda_x = \lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$. D'où : $\lambda_x = \lambda_y$

On a donc bien montré : $\forall x, y \in E^*,\ \lambda_x = \lambda_y$

Le résultat final est proche, mais qu'en est-il du vecteur nul ?

Soit un certain vecteur $y \in E^*$. Posons $\lambda = \lambda_y$. D'après ce qui précède, pour tout vecteur x de E^* : $u(x) = \lambda_x x = \lambda x$. Par ailleurs, l'égalité $u(\vec{0}) = \lambda \times \vec{0}$ est aussi vraie.

Les dernières lignes ci-dessus peuvent sembler être du " chipotage " , mais elles sont importantes pour boucler la rédaction.

Finalement, nous pouvons conclure : $\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ u(x) = \lambda x}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com