Calcul d'une somme par télescopage

Ayoub Hajlaoui

Réaction à la chaîne : des termes disparaissent
Pour alléger ma peine et flatter ma paresse.

Énoncé : *De la Terminale S à la prépa* (Temps conseillé : 20 min)

Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Autrement dit, $S_1 = \frac{1}{1(1+1)}$, $S_2 = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)}$, $S_3 = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)}$...

On peut noter (de manière un peu abusive puisque ce n'est techniquement vrai que pour $n > 2$) :

$S_n = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$

1) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

2) En déduire la limite de la suite (S_n)

Correction :

1) *Bon, pas de temps à perdre sur une question aussi simple : pour prouver A = B, on peut partir de A pour arriver à B, mais on peut aussi partir de B pour arriver à A. C'est plus judicieux ici.*

$\forall k \geq 1$, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$

Donc : $\boxed{\forall k \geq 1, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}$

2) On a donc : $\forall n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$

<u>Variante 1</u> : *en manipulant le signe somme*

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$ par changement de variable dans la seconde somme

Donc $S_n = (\frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}) - (\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1})$ (séparer pour faire apparaître un terme commun)

Donc $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = 1}$

Plus généralement, on prouve de la même manière cette propriété que vous aurez à utiliser l'année prochaine (et celle d'après, sûrement) : $\sum_{k = n_0}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_{n_0} - u_{n+1}$

<u>Variante 2</u> : *à l'œil nu*

$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ (pour n assez grand)

$S_n = \frac{1}{1} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = 1}$

Des termes disparaissent par télescopage.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com