Polynôme à coefficients entiers dont on connaît une racine

Ayoub Hajlaoui

Brillons par l'innocence. Sans la moindre bévue,
Calculons ces puissances, plus simples que prévu.

Énoncé : (temps conseillé : 15 min)

Déterminer un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dont une racine est $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Correction :

Comment avoir l'idée du degré du polynôme à chercher ? Ou faut-il utiliser une expression générale du genre $P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ *? En écrivant ensuite* $P(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\sqrt{2}+\sqrt{3})^k$ *? La suite semble bien fastidieuse..*
Bien entendu, le caractère fastidieux ne suffit pas forcément, en soi, à écarter une option. Mais la perspective d'écrire une somme de formules du binôme de Newton paraît un peu trop fastidieuse...
Intéressons-nous donc tout simplement aux premières puissances de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$*.*

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 2+2\sqrt{6}+3 = 5+2\sqrt{6}$

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3 = (\sqrt{2})^3+3(\sqrt{2})^2\sqrt{3}+3\sqrt{2}(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^3 = 2\sqrt{2}+6\sqrt{3}+9\sqrt{2}+3\sqrt{3}$
$= 11\sqrt{2}+9\sqrt{3}$ *(on pouvait aussi l'écrire* $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ *et se servir de ce qui précède)*

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^4 = \left((\sqrt{2}+\sqrt{3})^2\right)^2 = (5+2\sqrt{6})^2$ d'après ce qui précède. Donc :
$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^4 = 25+20\sqrt{6}+24 = 49+20\sqrt{6}$

On va continuer longtemps comme ça ? Ben non, il suffit juste de se débrouiller pour faire disparaître les racines par combinaison linéaire de puissances de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$*... Et là c'est bon !*

Remarquons $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^4 - 10(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 49+20\sqrt{6}-10(5+2\sqrt{6}) = -1$

Autrement dit : $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^4 - 10(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 + 1 = 0$

$\boxed{X^4 - 10X^2 + 1 \text{ est donc un polynôme à coefficients entiers dont une racine est } \sqrt{2}+\sqrt{3}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com