Autour de l'inégalité de Bernoulli

Ayoub Hajlaoui

Voici donc le récit que cet écrit commente :
L'inverse rétrécit, mais la puissance augmente.

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure 20 minutes)

On donne l'inégalité de Bernoulli :
pour tout entier naturel n, pour tout réel $t \geq -1$, $(1+t)^n \geq 1+nt$
(inégalité qu'on pourra utiliser dans la composition).
Soit x un nombre réel. On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = 1 + \dfrac{x}{n}$
1) Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $a_n > 0$
2) Montrer que pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n \times a_{n+1}$
3) Pour tout $n \geq n_0$, on pose $t_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} - 1$
a) Calculer t_n en fonction de n et x.
b) Démontrer que pour tout $n \geq n_0$, $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n \geq 1 - \dfrac{nx}{(n+1)(n+x)}$
c) En déduire que pour tout $n \geq n_0$, $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n \times a_{n+1} \geq 1$
4) En déduire que (u_n) est croissante à partir du rang n_0.
5) Expliquer pourquoi $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ne peut pas tendre vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction :

1) *La première chose qu'il faut comprendre, c'est que nous travaillons à x fixé dans cette question. x est un certain nombre réel, et nous devons montrer l'existence d'un rang n_0 à partir duquel* $1+\dfrac{x}{n} > 0$
Résolvons l'inéquation $1+\dfrac{x}{n} > 0$ (d'inconnue n) :
$1+\dfrac{x}{n} > 0 \iff \dfrac{x}{n} > -1 \iff x > -n$ (on a multiplié par n positif)
Donc $1+\dfrac{x}{n} > 0 \iff -x < n$ (multiplication par $-1 < 0$)
Finalement : $1+\dfrac{x}{n} > 0 \iff n > -x$
Il suffit donc que n soit strictement supérieur à $-x$ (qui est un réel fixé) pour que a_n soit strictement positif.
$\boxed{\text{Il existe donc bien un rang } n_0 \text{ tel que pour tout } n \geq n_0\ ,\ a_n > 0}$

Si l'on veut expliciter ce rang (ce qui n'est pas obligatoire ici) :
- si $x \geq 0$, $a_n = 1+\dfrac{x}{n} > 0$ pour tout $n \geq 1$
- et si $x \leq 0$, on peut prendre $n_0 = E(-x)+1$, où E est la fonction partie entière. $E(-x)$ *étant le plus grand entier inférieur ou égal à $-x$, nous sommes sûrs que $E(-x)+1$ est un entier (naturel car $-x \geq 0$) supérieur strictement à x*

Autre méthode (à laquelle il est parfois plus difficile de penser pour des Terminale) : on remarque $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$. *Donc, par définition de la notion de limite : pour tout intervalle ouvert* I *contenant* 1*, il existe un rang à partir duquel tous les* a_n *sont contenus dans* I.
L'intervalle ouvert $I =]\,0,5\ ;\ 1,5\,[$ *contient* 1. *Il existe donc un rang* n_0 *tel que pour tout* $n \geq n_0$, $a_n \in]\,0,5\ ;\ 1,5\,[$. *Donc pour tout* $n \geq n_0$, $a_n > 0$

2) *Si l'on ne se rend pas compte que* $u_n = a_n^n$*, on risque de transformer ce qui n'était que simple formalité en une succession inutile de souffrances...*
Pour tout $n \geq n_0$, $u_n = a_n^n$ avec $a_n > 0$ (d'après 1) donc $u_n > 0$. Donc a fortiori, $u_n \neq 0$, et la division par u_n est possible.
Pour $n \geq n_0$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a_{n+1}^{n+1}}{a_n^n} = \dfrac{a_{n+1}^n \times a_{n+1}}{a_n^n} = \dfrac{a_{n+1}^n}{a_n^n} \times a_{n+1}$. Donc $\boxed{\text{pour } n \geq n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n \times a_{n+1}}$

3)a) Pour tout $n \geq n_0$: $t_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \dfrac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}} - 1$
Vous ne comptez tout de même pas vous arrêter là, et laisser au correcteur une expression aussi horrible ?
Donc $t_n = \dfrac{\frac{n+1+x}{n+1}}{\frac{n+x}{n}} - 1 = \dfrac{n+1+x}{n+1} \times \dfrac{n}{n+x} - 1 = \dfrac{(n+1+x)n}{(n+1)(n+x)} - \dfrac{(n+1)(n+x)}{(n+1)(n+x)}$
Donc $t_n = \dfrac{n^2 + n + nx - n^2 - nx - n - x}{(n+1)(n+x)}$. Finalement : $\boxed{t_n = -\dfrac{x}{(n+1)(n+x)}}$

3)b) *Aha ! Une inégalité à démontrer... Peut-être est-il temps d'utiliser celle donnée par l'énoncé ? Mais quel rapport entre l'inégalité donnée par l'énoncé et celle qu'il faut démontrer ?*

Pour tout $n \geq n_0$, $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = (1 + t_n)^n$ (par définition de t_n)
Or, $t_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \geq -1$ car $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 0$ (d'après la question 1). On peut donc appliquer l'inégalité de Bernoulli.
Et oui ! Il était important de justifier que $t_n \geq -1$ *puisque c'est une hypothèse demandée pour pouvoir utiliser ladite inégalité.*
L'inégalité de Bernoulli donne : pour tout $n \geq n_0$, $(1 + t_n)^n \geq 1 + nt_n = 1 - n \times \dfrac{x}{(n+1)(n+x)}$

Nous avons donc montré : $\boxed{\text{pour tout } n \geq n_0 ,\ \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n \geq 1 - \dfrac{nx}{(n+1)(n+x)}}$

3)c) En multipliant l'inégalité obtenue précédemment par $a_{n+1} > 0$, on obtient :
pour tout $n \geq n_0$, $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n \times a_{n+1} \geq \left(1 - \dfrac{nx}{(n+1)(n+x)}\right) \times a_{n+1} = \left(1 - \dfrac{nx}{(n+1)(n+x)}\right) \times \left(1 + \dfrac{x}{n+1}\right)$
Que faire, maintenant ? A-t-on vraiment pléthore d'options ? Je ne pense pas... Mettons au même dénominateur dans chacun des deux facteurs.
On a donc, pour tout $n \geq n_0$: $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n \times a_{n+1} \geq \dfrac{(n+1)(n+x) - nx}{(n+1)(n+x)} \times \dfrac{n+1+x}{n+1}$
Donc $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n \times a_{n+1} \geq \dfrac{n^2 + nx + n + x - nx}{(n+1)(n+x)} \times \dfrac{n+1+x}{n+1} = \dfrac{(n^2+n+x)(n+1+x)}{(n+1)^2(n+x)}$
" Et là encore ? Que faire ? Ne nous dis pas qu'on va encore dév... "
D'où (après développement) : $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n \times a_{n+1} \geq \dfrac{n^3 + 2n^2 + n^2x + 2nx + n + x + x^2}{n^3 + 2n^2 + n^2x + 2nx + n + x}$
Le numérateur est égal au dénominateur plus x^2*....*
Le numérateur est supérieur au dénominateur. Il suffit donc de montrer que le dénominateur est positif pour aboutir au fait que leur quotient est supérieur à 1.
Le dénominateur est $(n+1)^2(n+x)$ (avec $(n+1)^2 > 0$) : il est donc du signe de $n + x$.
Mais pour $n \geq n_0$, $a_n > 0$ avec $a_n = 1 + \dfrac{x}{n} = \dfrac{n+x}{n}$, donc $n + x > 0$. Donc $(n+1)^2(n+x) > 0$

On a donc montré : pour tout $\geq n_0$, $\dfrac{n^3+2n^2+n^2x+2nx+n+x+x^2}{n^3+2n^2+n^2x+2nx+n+x} \geq 1$

Finalement, par transitivité : $\boxed{\text{pour tout } n \geq n_0,\ \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n \times a_{n+1} \geq 1}$

4) À partir du rang n_0, la suite (u_n) est strictement positive ($u_n = a_n^n$ avec $a_n > 0$ d'après la question 1)

Et pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n \times a_{n+1} \geq 1$ (d'après les questions 2 et 3c)

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante à partir du rang } n_0.}$

Rappeler qu'à partir de n_0, $u_n > 0$ était ici d'une importance capitale.

5) *Il y a plus d'une manière d'aboutir à ce résultat. Si on veut rester dans la « logique de l'énoncé », on peut dire ce qui suit :*

Posons $x = 1$. On a alors : $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. (u_n) est croissante à partir d'un certain rang n_0.

Et $u_{n_0} = \left(1+\dfrac{1}{n_0}\right)^{n_0} > 1$.

Donc : $\forall n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0} > 1$

Si (u_n) converge vers une limite l, on a donc nécessairement, par passage à la limite : $l \geq u_{n_0}$

(u_n) ne peut donc pas converger vers 1.

$\boxed{\text{On a donc montré que } \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \text{ ne peut pas tendre vers 1 quand } n \text{ tend vers } +\infty}$

On aurait aussi pu le montrer simplement de la manière suivante :
Pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{1}{n} \geq -1$. On peut donc utiliser l'inégalité de Bernoulli, et elle donne : $\forall n > 0$, $(1+\dfrac{1}{n})^n \geq 1 + n \times \dfrac{1}{n} = 2$. Et une suite minorée par 2 peut-elle tendre vers 1 ? Non.

Fort bien, mais quelqu'un qui n'a pas fait cet exercice n'aurait-il justement pas eu envie de dire que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$? Certes, nous venons de montrer que c'est faux. Mais pourquoi ? Pourquoi ne peut-on pas dire : $1+\dfrac{1}{n}$ tend vers 1 et 1^n tend vers 1 donc par composition, $(1+\dfrac{1}{n})^n$ tend vers 1 ?
1^n tend certes vers 1 (car toujours égal à 1) lorsque n tend vers $+\infty$.
$(1+\dfrac{1}{n})^{1000}$ tend aussi vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.
Mais pas $(1+\dfrac{1}{n})^n$. En effet, dans ce dernier cas, l'exposant aussi varie (il n'est pas fixe comme dans le cas précédent).
Et l'argument nous permettant de passer de la limite de $1+\dfrac{1}{n}$ à la limite de $(1+\dfrac{1}{n})^{1000}$ (appliquer la fonction continue $g : x \longmapsto x^{1000}$) ne tient donc plus lorsque l'exposant est n.

OK... Mais dans ce cas, vers quoi tend $(1+\dfrac{1}{n})^n$? Vers un certain nombre entre 2 et 3, qu'on appelle e...
Vous en saurez plus ici lorsque vous aurez vu les fonctions exponentielle et logarithme.