# Loi de couple et factorielles

Ayoub Hajlaoui

*Deux sigma d'affilée, des points d'exclamation !*
*Prétentieux défilé, matheuse procession.*

**Énoncé :** (temps conseillé : 25 min) *oral HEC, 2014*

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et soit un réel $a$ tels que :

$\forall i, j \in \mathbb{N},\ P\big([X=i]\cap[Y=j]\big) = \dfrac{a}{(i+j+1)!}$

1) Déterminer $a$.
2) Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**Correction :**

1) *On sait que la formule donnée par l'énoncé définit la loi de probabilité d'un couple...*

On sait : $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} P\big([X=i]\cap[Y=j]\big) = 1$. Autrement dit : $\displaystyle a\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{(i+j+1)!} = 1$

Calculons $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{(i+j+1)!} = \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{N}}}\frac{1}{(i+j+1)!}$

*Ah bon ? Nous savons calculer des sommes doubles infinies avec des factorielles ? Le seul cas de figure qui pourrait s'y rapporter dans le cours est celui de séries (simples) exponentielles... Le problème (mais aussi, la clé de la solution) dans cette double somme, c'est le $i+j$ qui vient nous embêter dans le calcul.*

La somme ci-haut fait intervenir les $i+j$ pour tous $i$ et $j$ entiers naturels.
Séparons-la donc en fonction de la valeur prise par $i+j$ :

$\displaystyle\sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{N}}}\frac{1}{(i+j+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{N}\\ i+j=k}}\frac{1}{(i+j+1)!}$ (principe de sommation par paquets). Donc :

$\displaystyle\sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{N}}}\frac{1}{(i+j+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{N}\\ i+j=k}}\frac{1}{(k+1)!}$

Pour tout entier naturel $k$, $\displaystyle\sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{N}\\ i+j=k}}\frac{1}{(k+1)!}$ s'écrit aussi $\displaystyle\sum_{\substack{0\le i\le k\\ i+j=k}}\frac{1}{(k+1)!}$ ou encore $\displaystyle\sum_{\substack{0\le i\le k\\ j=k-i}}\frac{1}{(k+1)!}$

Il s'ensuit : $\displaystyle\sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{N}\\ i+j=k}}\frac{1}{(k+1)!} = \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{(k+1)!}$ *$j$ a disparu car il est entièrement déterminé par $i$*

D'où : $\displaystyle\sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{N}\\ i+j=k}}\frac{1}{(k+1)!} = (k+1)\times\frac{1}{(k+1)!}$ *(somme précédente : somme des $\dfrac{1}{(k+1)!}$ indexée par $i$)*

Donc $\displaystyle\sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{N}\\ i+j=k}} \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!}$

Il ne nous reste plus qu'à sommer sur tous les entiers naturels $k$, et on obtient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{N}\\ i+j=k}} \frac{1}{(i+j+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1^k}{k!} = e^1 = e$$

On a donc montré : $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(i+j+1)!} = e$. Rappelons par ailleurs : $\displaystyle a\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(i+j+1)!} = 1$.

Finalement : $\boxed{a = e^{-1}}$

2) *Que faire ? Peut-on éviter le calcul des lois marginales de $X$ et $Y$ suivi de la comparaison, pour tous $i$ et $j$, de $P\big([X=i]\cap[Y=j]\big)$ d'une part et de $P(X=i)\times P(Y=j)$ d'autre part ? On peut " parier " sur la non-indépendance, et essayer de la prouver avec des valeurs simples...*

D'après la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'événements associé à $Y$ :

$$P(X=0) = \sum_{j=0}^{+\infty} P\big([X=0]\cap[Y=j]\big) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{(0+j+1)!} = e^{-1}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{(j+1)!} = e^{-1}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j!}$$

*(La dernière somme a été obtenue par changement de variable $j' = j+1$ à partir de la précédente)*

Donc $\displaystyle P(X=0) = e^{-1}\Big(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1^j}{j!} - \frac{1}{0!}\Big) = e^{-1}(e-1) = 1 - e^{-1}$

De même, par symétrie des rôles de $X$ et $Y$ dans l'énoncé : $P(Y=0) = 1 - e^{-1}$

Donc $P(X=0)\times P(Y=0) = (1-e^{-1})^2$

Par ailleurs, d'après la loi du couple donnée par l'énoncé :

$$P\big([X=0]\cap[Y=0]\big) = \frac{e^{-1}}{(0+0+1)!} = e^{-1}$$

Or, $(1-e^{-1})^2 \neq e^{-1}$ (il est facile de vérifier que $e^{-1}$ n'est pas solution de l'équation $(1-x)^2 = x$, par exemple en résolvant cette dernière de manière classique)

Donc $P(X=0)\times P(Y=0) \neq P\big([X=0]\cap[Y=0]\big)$.

Cela suffit pour conclure que $\boxed{\text{les variables } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$