Majoration de la variance d'une somme

Ayoub Hajlaoui

L'énoncé nous assomme et les variables dansent,
Variance d'une somme et sans indépendance !

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient n variables aléatoires de Bernoulli $X_1, X_2, ..., X_n$, de paramètres respectifs $p_1, p_2, ..., p_n$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
$V(X)$ désignera la variance de X.

Démontrer l'inégalité suivante : $V\big(\sum_{i=1}^{n} X_i\big) \leq \frac{n^2}{4}$

Correction :

1) *On n'aurait pas une petite formule du genre* $V\big(\sum_{i=1}^{n} X_i\big) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$ *? Oui mais dans le cas où les X_i sont indépendantes, ce qui n'est pas supposé par l'énoncé ici. Mais alors, que faire ? Se ramener à la covariance, pour profiter de sa bilinéarité.*

$$V\big(\sum_{i=1}^{n} X_i\big) = \mathrm{cov}\big(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i\big) = \mathrm{cov}\big(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\big)$$

Pourquoi ce changement de nom d'indice ? Pour éviter les bêtises en utilisant la bilinéarité.

Donc, par bilinéarité de la covariance : $V\big(\sum_{i=1}^{n} X_i\big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$

Puis : $V\big(\sum_{i=1}^{n} X_i\big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \big(E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)\big)$

Chaque X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i, donc $E(X_i) = p_i$.

Donc $V\big(\sum_{i=1}^{n} X_i\big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \big(E(X_iX_j) - p_ip_j\big)$

Et là, on arrive à un passage bloquant. Que faire de ce $E(X_iX_j)$ gênant ? Peut-être est-ce à ce moment-là qu'il faut majorer...

Pour tous i et j compris entre 1 et n, $0 \leq X_i \leq 1$ (car $X_i(\Omega) = \{0\ ;\ 1\}$) et $0 \leq X_j \leq 1$
Donc (en multipliant la dernière inégalité par X_i) $0 \leq X_iX_j \leq X_i$. D'où : $E(X_iX_j) \leq E(X_i) = p_i$

On en conclut donc : $V\big(\sum_{i=1}^{n} X_i\big) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(p_i - p_ip_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_i(1-p_j) = \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{n}(1-p_j)$

c'est-à-dire : $V\big(\sum_{i=1}^{n} X_i\big) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i\big(\sum_{j=1}^{n} 1 - \sum_{j=1}^{n} p_j\big) = \sum_{i=1}^{n} p_i\big(n - \sum_{j=1}^{n} p_j\big)$

Ici, réfrénons de regrettables ardeurs qui nous feraient écrire $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$. *Vous avez peut-être l'habitude d'énoncés dans lesquels les p_i correspondent à la probabilité associée à chaque valeur prise par une variable aléatoire, de telle sorte que leur somme fasse 1. Ici, rien à voir. Les p_i sont les paramètres de nos lois de Bernoulli !*

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Donc $V\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) \leq \Big(n - \sum_{j=1}^{n} p_j\Big) \sum_{i=1}^{n} p_i$

On a sorti la constante multiplicative $\Big(n - \sum_{j=1}^{n} p_j\Big)$ *de la somme indexée par* i*.*

Autrement dit : $V\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) \leq \Big(n - \sum_{i=1}^{n} p_i\Big) \sum_{i=1}^{n} p_i$

Second passage bloquant. On ne sait pas grand-chose sur $\sum_{i=1}^{n} p_i$*. Oui, pas grand-chose. Mais pas rien...*

Pour tout i compris entre 1 et n, $0 \leq p_i \leq 1$. Donc $0 \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \leq n$.

Posons $S = \sum_{i=1}^{n} p_i$. On a alors : $V\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) \leq (n-S)S = nS - S^2$ *Que nous voulons majorer...*

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ n]$ par $f(x) = nx - x^2$. On a : $V\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) \leq f(S)$

f est dérivable sur $[0\ ;\ n]$ car c'est une fonction polynôme, et : $\forall x \in [0\ ;\ n],\ f'(x) = n - 2x$
L'étude du signe de $f'(x)$ donne : $f'(x) \geq 0$ pour $x \leq \frac{n}{2}$, et $f'(x) \leq 0$ pour $x \geq \frac{n}{2}$.

f admet donc pour maximum $f\Big(\frac{n}{2}\Big) = n \times \frac{n}{2} - \Big(\frac{n}{2}\Big)^2 = \frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{4}$

D'où : pour tout réel x de $[0\ ;\ n]$, $f(x) \leq \frac{n^2}{4}$. Notamment : $f(S) \leq \frac{n^2}{4}$.

Et finalement : $V\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) \leq f(S) \leq \frac{n^2}{4}$

On a bien montré : $\boxed{V\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) \leq \frac{n^2}{4}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com