Partie entière, limites et suites

Ayoub Hajlaoui

Attendez voir sévir mon stylo boutadeux
Car je m'en vais détruire une idée fausse ou deux.

Énoncé : (temps conseillé : 45 min)

Soit E la fonction partie entière définie sur $\mathbb{R}$. On rappelle que pour tout réel x, $E(x)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. Ainsi, $E(3,7) = 3$, $E(5) = 5$, ou encore $E(-7,1) = -8$.

Autrement dit, $E(x)$ est l'unique nombre entier vérifiant $E(x) \leq x < E(x) + 1$

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = xE(\frac{1}{x})$

a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
b) Montrer, pour tout réel x, l'encadrement suivant : $x - 1 < E(x) \leq x$
c) Calculer la limite de f en zéro.

2) Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

a) Comparer $f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$
b) Expliquer le résultat obtenu.

Correction :

1)a) *La partie entière rend la tâche légèrement plus compliquée que d'habitude... On serait tentés d'écrire :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ *et* $E(0) = 0$ *donc par composition,* $\lim\limits_{x\to+\infty} E(\frac{1}{x}) = 0$. *Sauf que cet argument en soi ne tient pas la route ici, la fonction* E *n'étant pas continue en* 0*...*

Remarquons que pour tout $x > 1$, $0 < \frac{1}{x} < 1$, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. (Donc $0 \leq \frac{1}{x} < 1$)

Et donc, par définition de la fonction partie entière, pour tout $x > 1$, $E(\frac{1}{x}) = 0$.

Et multiplier 0 *par* x *ne changera rien à l'affaire...*

D'où : pour tout $x > 1$, $xE(\frac{1}{x}) = x \times 0 = 0$. On en conclut : $\lim\limits_{x\to+\infty} xE(\frac{1}{x}) = 0$

Autrement dit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

Comment ça ? $E(\frac{1}{x})$ *tend vers* 0 *quand* x *tend vers* $+\infty$*, d'accord... Mais* x *tend vers* $+\infty$ *!*
Leur produit ne donne-t-il donc pas une forme indéterminée ?
Lorsque x *tend vers* $+\infty$*,* $E(\frac{1}{x})$ *fait bien mieux que tendre vers* 0*...* $E(\frac{1}{x})$ *devient carrément ÉGAL à* 0 *lorsque* x *dépasse 1. Et une quantité ÉGALE à* 0 *multipliée par une quantité qui tend vers* $+\infty$*, ça donne une quantité égale à* 0*. Par exemple, vers quoi tend* $0n$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$ *? Vers* 0 *parce que* $0n = 0$
Voilà pourquoi nous ne sommes pas ici dans le cadre d'une forme indéterminée.

De même, pour tout $x \leq -1$, on a : $-1 \leq \frac{1}{x} < 0$ par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_-^*$.

Et donc, par définition de la fonction partie entière, pour tout $x \leq -1$, $E(\frac{1}{x}) = -1$.

D'où : pour tout $x \leq -1$, $xE(\frac{1}{x}) = -x$. Or, $\lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$. Donc : $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$

1)b) On sait que pour tout réel x : $E(x) \leq x < E(x) + 1$

Que faire de cet encadrement pour obtenir le nouvel encadrement demandé par l'énoncé ? Si on n'a pas le réflexe simple de séparer cet encadrement en deux inégalités, on risque d'y rester longtemps...

Autrement dit : pour tout réel x, $E(x) \leq x$ et $x < E(x) + 1$

La seconde inégalité donne : $x - 1 < E(x)$.

Et en la combinant à la première inégalité ($E(x) \leq x$), on obtient bien l'encadrement recherché, à savoir : $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ \ x - 1 < E(x) \leq x}$

1)c) *Une question de limite précédée d'une question sur un encadrement... N'est-ce pas téléphoné ? Un théorème des gendarmes ou un théorème de comparaison n'est pas loin.*

L'encadrement démontré en 1)b) est valable pour tout réel x. Il est donc notamment valable pour $\frac{1}{x}$ (avec $x \neq 0$). Autrement dit, pour tout réel $x \neq 0$: $\frac{1}{x} - 1 < E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$

Ce qui s'écrit encore : $\frac{1-x}{x} < E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$

Et là, on va pouvoir obtenir un encadrement de $f(x)$, mais attention au piège lorsqu'on va multiplier par x ! Il va falloir distinguer des cas en fonction du signe de x. Eh oui, lorsqu'on multiplie les membres d'une inéquation par une certaine quantité, il faut porter attention au signe de cette dernière !

<u>Pour tout $x > 0$</u>, $x \times \frac{1-x}{x} < xE(\frac{1}{x}) \leq x \times \frac{1}{x}$. D'où : $1 - x < f(x) \leq 1$

Et du coup, on va pouvoir obtenir notre limite de f en zéro, non ? Pas entièrement. Ça va nous permettre d'obtenir la limite de f quand x tend vers 0 tout en restant supérieur à 0...

Ce dernier encadrement étant valable pour tout $x > 0$, intéressons-nous à la limite quand x tend vers 0^+ des encadrants. $\lim_{x \to 0^+} 1 - x = 1$ et $\lim_{x \to 0^+} 1 = 1$. Le théorème des gendarmes nous permet de conclure : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

<u>Pour tout $x < 0$</u>, $x \times \frac{1-x}{x} > xE(\frac{1}{x}) \geq x \times \frac{1}{x}$. D'où : $1 \leq f(x) < 1 - x$

Ce dernier encadrement est valable pour tout $x < 0$.

$\lim_{x \to 0^-} 1 - x = 1$ et $\lim_{x \to 0^-} 1 = 1$. Le théorème des gendarmes nous permet de conclure : $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$

f admet en 0 une limite à droite et une limite à gauche, toutes deux égales à 1.

On peut donc en conclure : $\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = 1}$

2)a) D'une part, calculer $f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right)$ est relativement simple. $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ (par somme de limites)

Donc $f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = f(1) = 1 \times E(\frac{1}{1}) = 1 \times E(1) = 1 \times 1 = 1$

D'autre part, $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim_{n \to +\infty} u_n \times E(\frac{1}{u_n}) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \times E\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \times E\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) \times E\left(\frac{n}{n+1}\right)$

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{n}{n+1} < 1$. Donc $E\left(\frac{n}{n+1}\right) = 0$.

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right) \times E\left(\frac{n}{n+1}\right) = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) \times E\left(\frac{n}{n+1}\right) = 0$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 0$.

On remarque : $\boxed{f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)}$

Ce genre de question donne souvent lieu à un concordisme funeste : l'élève part du principe qu'il doit forcément trouver $f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$. Quitte à prendre des libertés avec la vérité...

2)b) *Comment ? On n'aurait donc pas TOUJOURS le droit de composer librement les limites ???*

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ mais la fonction f n'est pas continue en 1.

Voilà pourquoi on ne peut pas conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(1)$. Et dans cet exemple précis, ce n'est effectivement pas le cas.

Lorsque n tend vers $+\infty$, u_n tend vers 1, mais $f(u_n)$ ne tend pas forcément vers $f(1)$, du fait de la non-continuité de f en 1.

Quant à la non-continuité de f en 1, elle est due à la fonction partie entière.