Suite de sommes partielles

Ayoub Hajlaoui

N'oublie point ce qui suit, toi qui crains la puissance :
C'est l'enfant du produit et d'une récurrence.

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure)

On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

1. Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, $v_n > \dfrac{1}{2}$.
   (c) Trouver le plus petit entier N tel que si $n \geqslant N$, $v_n < \dfrac{3}{4}$.
   (d) En déduire que si $n \geqslant N$, alors $u_{n+1} < \dfrac{3}{4}u_n$.

   On pose pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $S_n = u_5 + u_6 + \cdots + u_n$.
2. On se propose de montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 5}$ est convergente.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$,
   $$u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5.$$
   (b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$,
   $$S_n \leqslant \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5.$$
   (c) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $S_n \leqslant 4u_5$.
3. Montrer que la suite $\left(S_n\right)_{n\geqslant 5}$ est croissante et en déduire qu'elle converge.

Correction :

1)a) Pour tout entier naturel $n > 0$, $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \dfrac{2^n}{n^2}$

Rappelons que diviser par une fraction, c'est tout simplement multiplier par son inverse...

Donc $v_n = \dfrac{(n+1)^2}{2^n \times 2} \times \dfrac{2^n}{n^2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{(n+1)^2}{n^2} = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{n}{n} + \dfrac{1}{n}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \times \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2$

Par somme de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$ puis, par composition : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2 = 1$

Et enfin, par produit de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2} \times \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2 = 1$. Autrement dit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}}$

1)b) D'après le calcul effectué en 1)a) : pour tout entier naturel $n > 0$, $v_n = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$

Or, $1 + \frac{1}{n} > 1$. Donc, par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, $(1 + \frac{1}{n})^2 > 1^2$

Et en multipliant cette inégalité par $\frac{1}{2} > 0$, on obtient : $\frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 > \frac{1}{2}$

On a donc montré : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n > 0,\ v_n > \frac{1}{2}}$

1)c) On résout l'inéquation $v_n < \frac{3}{4}$ *(afin de savoir pour quels n c'est vrai)*

$v_n < \frac{3}{4} \iff \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < \frac{3}{4} \iff \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < \frac{3}{2}$ (en multipliant par $2 > 0$)

$\iff \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} < \sqrt{\frac{3}{2}}$ par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$

$\iff 1 + \frac{1}{n} < \sqrt{\frac{3}{2}}$ car $1 + \frac{1}{n}$ est positif

Pourquoi ce dernier " car " ? Rappelons qu'en règle générale, on n'a pas $\sqrt{x^2} = x$. C'est vrai si et seulement si x est positif. En général, $\sqrt{x^2} = |x|$

L'inéquation $v_n < \frac{3}{4}$ équivaut donc à $1 + \frac{1}{n} < \sqrt{\frac{3}{2}}$

$1 + \frac{1}{n} < \sqrt{\frac{3}{2}} \iff \frac{1}{n} < \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \iff n > \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1} \simeq 4,4$

$\boxed{\text{Le plus petit entier } N \text{ tel que si } n \geq N,\ v_n > \frac{1}{2}, \text{ est donc } N = 5.}$

Mais $4,4$ est plus proche de 4 que de 5, non ? Si si, mais on s'en fiche. On veut prendre le premier N qui soit plus grand, et c'est donc un arrondi par excès qu'il faut. Autrement dit $N = 5$. Si on avait trouvé comme condition, $n > 4,0001$, on aurait aussi pris $N = 5$. Parce que le premier entier au-dessus de $4,0001$ est 5.

1)d) *Ceci est une question cadeau, qui peut être traitée même si on n'a pas réussi la précédente, en admettant son résultat.*

Si $n \geq N$ (c-à-d si $n \geq 5$), $v_n < \frac{3}{4}$. Ce qui veut dire, par définition de v_n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}$

Et enfin, en multipliant par $u_n > 0$, $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$. On a bien montré que $\boxed{\text{si } n \geq N, \text{ alors } u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n}$

2)a) Montrons par récurrence sur n que pour tout entier naturel $n \geq 5$, la propriété P_n : « $u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ » est vraie. *(prudence pour ce qui suit, ici c'est pour $n \geq 5$, et pas pour $n \geq 0$)*

<u>Initialisation</u> : pour $n = 5$: $\left(\frac{3}{4}\right)^{5-5} u_5 = \left(\frac{3}{4}\right)^{0} u_5 = u_5 \leq u_5$, donc P_5 est vraie.

<u>Hérédité</u> : Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel $n \geq 5$, et montrons P_{n+1}. Autrement dit, supposons $u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$, et montrons $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1-5} u_5$ (c-à-d $u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} u_5$)

D'après 1)d), $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$. Et par hypothèse de récurrence : $u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$. En multipliant cette inégalité par $\frac{3}{4} > 0$, on obtient : $\frac{3}{4}u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} u_5$. Donc $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} u_5$. Finalement, on a bien : $u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} u_5$

On a bien montré : $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. La propriété est héréditaire.

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure :

$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geq 5,\ u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5.}$

2)b) Dans la question précédente, on a prouvé une inégalité valable pour tout $n \geq 5$. En l'utilisant pour chaque terme de S_n, on obtient : $u_5 \leq u_5$, $u_6 \leq \frac{3}{4}u_5$, $u_7 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^2 u_5 \ldots, u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_n$.
En sommant toutes ces inégalités, on obtient :
$u_5 + u_6 + u_7 + \ldots + u_n \leq u_5 + \frac{3}{4} u_5 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 u_5 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ Autrement dit :
$S_n \leq u_5 + \frac{3}{4} u_5 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 u_5 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.
En factorisant le membre de droite par u_5, on parvient donc au résultat suivant :

$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 5,\ S_n \leqslant \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5.}$

2)c) *Voyons voir... La somme entre crochets du membre de droite a été remplacée par 4. Comment est-ce possible ? Que savons-nous sur cette somme ?*

Pour tout entier naturel $n \geq 5$, $1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}$ est une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$

Rappelons, « en français », la formule de la somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q :
$S =$ *(premier terme de la somme)* $\times \dfrac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$
Il est bon de la connaître en français, pour ne pas se tromper sur la puissance.

Cette somme peut encore s'écrire $\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}$
Elle comporte donc $n - 5 + 1 = n - 4$ termes.
N'oubliez pas : pour compter de 0 jusqu'à 10, vous auriez besoin de 11 doigts...

Donc $1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} = 1 \times \dfrac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}}{1 - \frac{3}{4}} = \dfrac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}}{\frac{1}{4}} = 4 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}\right)$

Ah ben le voilà, notre 4 !!

Pour tout $n \geq 5$, $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} \leq 1$ *(on prend 1 et on lui soustrait un nombre positif...)*

Donc (en multipliant par $4 > 0$) : $4 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}\right) \leq 4$

Autrement dit : $1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \leq 4$

En multipliant par $u_5 > 0$, on obtient : $4\left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] \leq 4u_5$

Et comme on a montré en 2)b) l'inégalité $S_n \leqslant \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5$, on peut conclure : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geq 5,\ S_n \leq 4u_5.}$

3) Pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_{n+1} - S_n = (u_5 + u_6 + \cdots + u_{n+1}) - (u_5 + u_6 + \cdots + u_n) = u_{n+1}$
En effet, la somme S_{n+1} est la somme S_n à laquelle on a ajouté u_{n+1}

Or, $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}} > 0$. Donc $S_{n+1} - S_n > 0$. La suite (S_n) est donc croissante. De plus, d'après 2)c), elle est majorée (par $4u_5$). On en conclut (par théorème de convergence monotone) que (S_n) converge.