Coefficients binomiaux et cosinus

Ayoub Hajlaoui

Des senteurs pathogènes, un ragoût bien atroce :
Quelques k parmi n agrémentés de cos

Énoncé : (temps conseillé : 15 min)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$

Correction :

L'astuce souvent utilisée face à ce genre de somme trigonométrique est celle du passage aux complexes. Par ailleurs, les coefficients binomiaux dans la somme nous donnent envie d'utiliser le binôme de Newton, ce qui n'est pas possible en l'état...

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathfrak{Re}(e^{ikx})$ où $\mathfrak{Re}$ est la partie réelle. Par linéarité de celle-ci :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = \mathfrak{Re}\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx}\Big) = \mathfrak{Re}\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{ix})^k \times 1^{n-k}\Big).$

D'après la formule du binôme de Newton, on a alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = \mathfrak{Re}\big((e^{ix}+1)^n\big).$

On a fait disparaître le signe somme, ce qui est déjà pas mal... Maintenant, utilisons une fois encore une technique courante dans ce genre de situation, à savoir celle de l'angle moitié, pour faire apparaître du cosinus (donc réel).

D'où : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = \mathfrak{Re}\Big(\Big[e^{i\frac{x}{2}}(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}})\Big]^n \Big) = \mathfrak{Re}\Big(e^{i\frac{nx}{2}} \Big[e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}}\Big]^n \Big)$

Puis : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = \mathfrak{Re}\Big(e^{i\frac{nx}{2}} \times 2^n \times \Big[\frac{e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}}}{2}\Big]^n \Big) = \mathfrak{Re}\Big(e^{i\frac{nx}{2}} \times 2^n \times \cos^n(\frac{x}{2})\Big)$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = \Big[2\cos(\frac{x}{2})\Big]^n \times \mathfrak{Re}\big(e^{i\frac{nx}{2}}\big)$

Finalement, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = \Big[2\cos\big(\frac{x}{2}\big)\Big]^n \times \cos\big(\frac{nx}{2}\big)}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com