Décomposition en somme de fonctions paire et impaire

Ayoub Hajlaoui

Je montre ce qui suit en croquant dans ma pomme :
Toute fonction s'écrit comme une telle somme.

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On cherche à démontrer que f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction f_P paire et d'une fonction f_I impaire.
Autrement dit, on cherche à prouver l'existence et l'unicité d'un couple de fonctions (f_P, f_I) avec f_P paire et f_I impaire telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f_P(x) + f_I(x)$

1) On suppose dans cette question qu'il existe deux telles fonctions, f_P paire et f_I impaire, vérifiant : pour tout réel x, $f(x) = f_P(x) + f_I(x)$. Montrer que f_P et f_I sont uniques.

2)a) Soit f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$. Montrer que f_1 est paire.

b) Soit f_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$. Montrer que f_2 est impaire.

3) Conclure.

4) Application :
a) Soit la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis écrire g comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
b) Écrire la fonction cosinus comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

5) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et paire. Montrer que sa dérivée f' est impaire.

Correction :

1) *L'énoncé nous dit de supposer que f peut s'écrire comme une somme de deux fonctions f_P et f_I, avec f_P paire et f_I impaire. Comment montrer l'unicité de f_I et de f_P ?*

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = f_P(x) + f_I(x)$.

Soient une fonction g_P paire et une fonction g_I impaire, définies sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x, $f(x) = g_P(x) + g_I(x)$

Le but sera alors de montrer que la fonction g_p n'est autre que la fonction f_p, et que la fonction g_I n'est autre que la fonction f_I. C'est ainsi qu'on prouvera l'unicité de f_P et de f_I.

On a donc, pour tout réel x : $f_P(x) + f_I(x) = g_P(x) + g_I(x)$.
Et alors ? Et alors, si on remplaçait x par $-x$? Puisque les fonctions mises en jeu ici sont soit paires, soit impaires, ça devrait être intéressant...

L'égalité précédente étant valable pour tout réel x, elle est donc aussi valable pour $-x$: pour tout réel x, $f_P(-x) + f_I(-x) = g_P(-x) + g_I(-x)$ (*)

Sachant que f_P et g_P paires, et que f_I et g_I sont impaires, on a les égalités suivantes : $f_P(-x) = f_P(x),\ g_P(-x) = g_P(x),\ f_I(-x) = -f_I(x)$, et $g_I(-x) = -g_I(x)$.

L'égalité (*) peut donc s'écrire : pour tout réel x, $f_P(x) - f_I(x) = g_P(x) - g_I(x)$.

On a donc, pour tout réel x, le système suivant : $\begin{cases} f_P(x) + f_I(x) = g_P(x) + g_I(x) \\ f_P(x) - f_I(x) = g_P(x) - g_I(x) \end{cases}$

En sommant la première et la seconde ligne de ce système, on obtient l'équation suivante : pour tout réel x, $2f_P(x) = 2g_P(x)$. Autrement dit, pour tout réel x, $f_P(x) = g_P(x)$.
La première ligne du système donne alors : pour tout réel x, $f_P(x) + f_I(x) = f_P(x) + g_I(x)$, et, par suite : $f_I(x) = g_I(x)$
La fonction g_P est donc égale à la fonction f_P, et la fonction g_I est égale à la fonction f_I.

On a donc montré ce qui suit : $\boxed{\text{s'il existe deux fonctions } f_p \text{ paire et } f_I \text{ impaire telles que}}$ $\boxed{f = f_P + f_I, \text{ alors } f_P \text{ et } f_I \text{ sont uniques.}}$
On a montré l'unicité si existence, mais on n'a pas encore montré l'existence...

2)a) Pour tout réel x, $f_1(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = f_1(x)$. $\boxed{f_1 \text{ est donc paire.}}$

2)b) Pour tout réel x, $f_2(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} = -\dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = -f_2(x)$. $\boxed{f_2 \text{ est donc impaire.}}$

3) *" Conclure " ? Comment ça, " conclure " ? Rappelons qu'on cherche à démontrer que f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire... Or, l'énoncé nous a fait démontrer qu'une certaine fonction f_1 était paire, et qu'une autre fonction f_2 était impaire. Leur somme ne ferait-elle pas f, par hasard ?*

Pour tout réel x, $f_1(x) + f_2(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = \dfrac{2f(x)}{2} = f(x)$. Donc $f = f_1 + f_2$. On a donc montré l'existence d'une fonction paire et d'une fonction impaire dont la somme est f.

De plus, d'après 1), cette décomposition de f en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire est unique.

$\boxed{\text{On a donc finalement montré l'existence et l'unicité d'un couple de fonctions } (f_p, f_I) \text{ avec}}$ $\boxed{f_P \text{ paire et } f_I \text{ impaire telles que } f = f_P + f_I.}$ $\quad (f_P = f_1 \text{ et } f_I = f_2)$

4)a) Pour montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que pour tout réel x, $x^2 + x + 1$ est positif *(afin qu'on puisse lui appliquer la fonction racine carrée)*.
Le discriminant associé à ce polynôme de degré 2 est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$
Ce polynôme est donc de signe constant, donné par son coefficient dominant $1 > 0$.
Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$. $\boxed{\text{La fonction } g \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$

Soient les fonctions g_1 et g_2 définies sur $\mathbb{R}$ par $g_1(x) = \dfrac{g(x) + g(-x)}{2} = \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}}{2}$
et $g_2(x) = \dfrac{g(x) - g(-x)}{2} = \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}}{2}$
D'après ce qui précède, $\boxed{g_1 \text{ est paire et } g_2 \text{ est impaire, et } g = g_1 + g_2.}$

4)b) *Ici, soit on fonce tête baissée et on traite la question mécaniquement comme en 4)a), soit on se souvient que...*
La fonction cos est paire. De plus :
$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \cos(x) + 0 = \cos(x) + \phi(x)$ où ϕ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
ϕ est impaire. En effet : $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(-x) = 0$ et $\phi(x) = 0$ donc on a bien $\phi(-x) = -\phi(x)$
Pour l'anecdote, ϕ est aussi paire, mais ça n'a pas d'importance ici. La fonction nulle est la seule fonction à la fois paire et impaire.

En écrivant $\boxed{\cos = \cos + \phi}$, on a bien écrit la fonction cosinus comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

5) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et paire, c'est-à-dire telle que, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$. *Que faire pour montrer que f' est impaire ?*

Que peut-on faire, en réalité, mis à part dériver les membres de gauche et de droite dans cette égalité ?

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(-x)$. L'égalité précédente s'écrit, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = f(x)$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse, et la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
En dérivant chaque membre de l'égalité, on obtient donc, pour tout réel x : $h'(x) = f'(x)$.
Or, pour tout réel x : $h'(x) = -f'(-x)$.

Souvenez-vous en effet que lorsque f est dérivable $f(ax+b)$ se dérive en $af'(ax+b)$. Ici, $a = 1$ et $b = 0$. Ou alors appliquez la formule plus générale (mais à la limite du programme de TS) de la dérivée d'une composée de fonctions dérivables : $(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$ (ici, $g(x) = -x$)

On a donc, pour tout réel x : $-f'(-x) = f'(x)$. Autrement dit, pour tout réel x, $f'(-x) = -f'(x)$.
$\boxed{f' \text{ est donc impaire.}}$

On pourrait montrer de même que si f est impaire et dérivable, f' est paire.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com