Equivalence entre inversibilités de $I - AB$ et $I - BA$

Ayoub Hajlaoui

Vrai pour $I - AB$? $I - BA$ aussi.
Mais comment le montrer ? Tel est notre souci.

Énoncé : (temps conseillé : 15 min)

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $I - AB$ est inversible si et seulement si $I - BA$ est inversible.

Correction :

Supposons que $I - AB$ est inversible, et posons $C = (I - AB)^{-1}$.
Par définition : $C(I - AB) = (I - AB)C = I$. Autrement dit, $C - CAB = C - ABC = I$.
Remarquons donc notamment : $CAB = ABC \ (= C - I)$. Autrement dit, C et AB commutent.

Le produit n'étant pas commutatif sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ne nous privons surtout pas d'une telle observation. Peut-être pourra-t-elle servir....

$I = C - ABC$.

À partir de là, notre objectif est a priori de faire apparaître un produit de $I - BA$ avec une autre matrice qui donnerait I. Cela prouvera que $I - BA$ est inversible.
Cela étant dit, comment faire apparaître $I - BA$ dans l'égalité précédente ? On pourrait soustraire BA à chacun des deux membres, ce qui ferait apparaître $I - BA$ dans le membre de gauche... Ça nous donnerait $I - BA = C - ABC - BA$, mais nous n'aurions alors aucune idée de par quoi multiplier ce $I - BA$ pour obtenir l'identité...
Alors que faire ? Nous avons du I dans notre égalité initiale, ce ne devrait pas être difficile de faire apparaître du BA...

$I = C - ABC$. En multipliant cette égalité par B à gauche et A à droite, on obtient :
$BIA = B(C - ABC)A$. Autrement dit : $BA = BCA - BABCA$.

Oulàlà, ça commence à devenir moche. Pas vraiment, en fait ! Nous avons fait apparaître du ABC...

L'égalité précédemment obtenue est : $BA = BCA - B(ABC)A$. Or, nous savons : $CAB = ABC$ (C et AB commutent).
Donc $BA = BCA - B(CAB)A$. Autrement dit, $BA = BCA - BCABA = BCA(I - BA)$.
D'où : $I - BA = I - BCA(I - BA)$.

Nous y sommes presque, pas de raté sur la fin ! Mettons tous les $I - BA$ ensemble.

Donc : $I - BA + BCA(I - BA) = I$. Ou encore : $(I - BA)(I + BCA) = I$.
$I - BA$ est donc inversible (d'inverse $I + BCA$).

On a montré : si $I - AB$ est inversible, alors $I - BA$ est inversible.

Cette implication est vraie pour tout couple (A, B) de $\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2$. Elle est donc vraie aussi pour (B, A), et on obtient alors : si $I - BA$ est inversible, alors $I - AB$ est inversible.

Finalement : $\boxed{I - AB \text{ est inversible si et seulement si } I - BA \text{ est inversible.}}$

Pour ceux d'entre vous qui ont vu la structure d'anneau (dont $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$ est un exemple), l'énoncé aurait pu être un peu plus général : « soient a et b deux éléments d'un anneau $(A, +, \times)$ (pas nécessairement commutatif). Montrer que $1 - ab$ est inversible si et seulement si $1 - ba$ est inversible (1 étant bien sûr le neutre pour $\times$) ».
La démonstration se ferait de la même manière (en remplaçant bien sûr I par 1, A par a, B par b...). Un passage important reste le suivant : on a beau être dans un anneau non nécessairement commutatif, on sait quand même que tout élément inversible commute avec son inverse !
(Et, bien entendu, la question de la commutatitivé ou non d'un anneau, ou du fait que deux éléments d'un anneau commutent ou non, porte sur la loi $\times x$. Pour la loi $+$, la commutativé est acquise ! Rappelons en effet que pour que $(A, +, \times)$ soit un anneau, une condition nécessaire est que $(A, +)$ soit un groupe commutatif...

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com