Exponentielle et équations différentielles

Ayoub Hajlaoui

Vous trouverez ici de quoi mater l'hiver
Lorsque l'humeur vacille : quelques maths et des vers.

Énoncé : (temps conseillé : 45 min) *D'après bac S Antilles-Guyane, juin 2008*

Une fonction f est solution de l'équation différentielle (E_1) si :
pour tout réel x, $f'(x) + 2f(x) = 3e^{-3x}$.

De même, on dit qu'une fonction f est solution de l'équation différentielle (E_2) si :
pour tout réel x, $f'(x) + 2f(x) = 0$.

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \dfrac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$

1) Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{9}{2}e^{-2x}$ est une solution de (E_2).

2) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3e^{-3x}$ est une solution de l'équation (E_1).

3) En déduire que la fonction u est une solution de (E_1).

4) Déterminer les limites de u en $+\infty$ et en $-\infty$.

5) Étudier les variations de la fonction u et dresser son tableau de variations.

6) Soit C la courbe représentative de u dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Calculer les coordonnées du points d'intersection de C avec l'axe des ordonnées.

Correction :

1) *Il suffit de revenir à la définition donnée par l'énoncé de ce qu'est une solution de* (E_2)*...*
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $h'(x) = \dfrac{9}{2} \times (-2) \times e^{-2x} = -9e^{-2x}$. Donc $h'(x) + 2h(x) = -9e^{-2x} + 2 \times \dfrac{9}{2}e^{-2x}$
On a montré que pour tout réel x, $h'(x) + 2h(x) = 0$. $\boxed{h \text{ est donc bien une solution de } (E_2).}$

2) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $g'(x) = -3 \times (-3) \times e^{-3x} = 9e^{-3x}$. Donc $g'(x) + 2g(x) = 9e^{-3x} - 6e^{-3x}$
On a montré que pour tout réel x, $g'(x) + 2g(x) = 3e^{-3x}$. $\boxed{g \text{ est donc bien une solution de } (E_1).}$

3) *Il faut respecter l'énoncé jusqu'au bout. L'énoncé dit " en déduire ". Il faut donc se servir de la ou des questions précédentes.*
Remarquons que la fonction u est la somme des fonctions h et g. Donc, par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x : $u'(x) = h'(x) + g'(x)$.
Donc $u'(x) + 2u(x) = h'(x) + g'(x) + 2h(x) + 2g(x) = \big(h'(x) + 2h(x)\big) + \big(g'(x) + 2g(x)\big)$
Or, d'après 1) et 2), $h'(x) + 2h(x) = 0$ et $g'(x) + 2g(x) = 3e^{-3x}$.
Donc, pour tout réel x, $u'(x) + 2u(x) = 0 + 3e^{-3x} = 3e^{-3x}$. $\boxed{u \text{ est donc bien une solution de } (E_1).}$

4) Pour tout réel x, on a : $u(x) = \dfrac{9}{2} \times \dfrac{1}{e^{2x}} - \dfrac{3}{e^{3x}} = \dfrac{9}{2} \times \dfrac{1}{(e^x)^2} - \dfrac{3}{(e^x)^3}$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
Donc, par composée, quotient et somme de limites : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0}$

J'ai écrit $u(x)$ sous cette autre forme pour pouvoir faire un calcul rapide de limite à partir de celle de e^x, et éviter par exemple de poser un changement de variable.

Maintenant, en $-\infty$, c'est une autre paire de manches, vu que ça donne une forme indéterminée...

Pour tout réel x, $u(x) = e^{-3x}\left(\frac{9}{2}e^x - 3\right)$ *(Idée : factoriser par le terme le plus " fort " , qui, lorsque x tend vers en $-\infty$ est e^{-3x})*

D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc par produit et somme de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{9}{2}e^x - 3 = -3$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x = +\infty$. Donc en posant le changement de variable $X = -3x$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^X = +\infty$

Finalement, par produit de limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = -\infty}$

5) On a déjà montré que u était dérivable, et même que u était une solution de (E_1).

Pour tout réel x, $u'(x) + 2u(x) = 3e^{-3x}$.

Autrement dit, $u'(x) = 3e^{-3x} - 2u(x) = 3e^{-3x} - 2\left(\frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}\right) = 3e^{-3x} - 9e^{-2x} + 6e^{-3x}$.

D'où : pour tout réel x, $u'(x) = 9e^{-3x} - 9e^{-2x}$.

Maintenant, résolvons sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $u'(x) \geq 0$:

$u'(x) \geq 0 \iff 9e^{-3x} - 9e^{-2x} \geq 0 \iff e^{-3x} - e^{-2x} \geq 0$ (en divisant par $9 > 0$)

D'où : $u'(x) \geq 0 \iff e^{-3x} \geq e^{-2x} \iff -3x \geq -2x$ (par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$)

$u'(x) \geq 0 \iff 0 \geq -2x + 3x \iff x \leq 0$ (et de même $u'(x) = 0 \iff x = 0$)

On obtient donc le tableau de signe de $u'(x)$ et le tableau de variations de u :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
u	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0

$u(0) = \frac{9}{2} \times e^0 - 3 \times e^0 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{9}{2} - \frac{6}{2} = \frac{3}{2}$

5) *Question relativement simple, à l'intérêt limité, dont l'énoncé était plus là pour vous perturber qu'autre chose. Je sais déjà que j'en ai piégé plus d'un, qui se sont dit " une dernière question aussi simple, ce n'est pas possible, il y a forcément un piège ! " Non non, ça arrive, et il faut savoir reconnaître une question simple quand elle vient à nous. À titre de comparaison, la seconde partie de la question 4 était bien plus difficile.*

Soit $A(0, y_A)$ le point d'intersection de C avec l'axe des ordonnées.

Ben oui, le point d'intersection de C avec l'axe des ordonnées est sur... l'axe des ordonnées, donc son abscisse est nulle...

A est sur la courbe C de la fonction u, donc $y_A = u(x_A) = u(0) = \frac{3}{2}$.

$\boxed{\text{Le point d'intersection de } C \text{ est donc le point } A \text{ de coordonnées } x_A = 0 \text{ et } y_A = \frac{3}{2}.}$