Image d'un endomorphisme par un polynôme

Ayoub Hajlaoui

Énoncé : (temps conseillé : 25 min) *D'après oral CCP 2006*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension N finie, u un endomorphisme de E et P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$.

1) Montrer que si λ est une valeur propre de u, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de l'endomorphisme $P(u)$.

2) Montrer que si u est diagonalisable, alors $P(u)$ aussi.

3) La réciproque est-elle vraie ?

Correction :

1) Soit λ une valeur propre de u. Il existe donc un vecteur x non nul de E tel que $u(x) = \lambda x$.

D'accord, c'est la définition, mais comment montrer que $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$. Commençons par expliciter $P(u)$, sans quoi la tâche risque d'être difficile...

Soit n le degré de P. Il existe a_0 ,..., $a_n \in \mathbb{K}$ tels que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad (a_n \neq 0)$

L'énoncé a eu la gentillesse de me préciser que P était non nul. S'il ne l'avait pas fait, j'aurais dû traiter à part le cas où P est nul.

On a alors $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$ *(rappelons que u^0 est l'application identité de E)*

Oui et alors ? Comment montrer que $P(\lambda)$ est valeur propre de l'endomorphisme $P(u)$? Comme ça, à partir de rien, c'est difficile. Mais en reprenant le vecteur x dont on a montré l'existence plus haut...

$P(u)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k(x)$. Or, par récurrence immédiate *(vraiment lol)*, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \lambda^k x$

En effet, $u^0(x) = x$, $u^1(x) = \lambda x$, $u^2(x) = u(u(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x)$ (par linéarité) donc $u^2(x) = \lambda \times \lambda x = \lambda^2 x$... Je ne détaille pas la rédaction de la récurrence ici parce que, de surcroît, le fait que $u^k(x) = \lambda^k x$ est un résultat de cours pour beaucoup d'entre vous. Mais, en cas de doute, rédigez-la.

Donc $P(u)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k x = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k\right) x$. *Ah, mais qui est ce $\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$?*

On remarque : $P(u)(x) = P(\lambda)x$, avec, par définition de x : $x \neq 0$.

$\boxed{P(\lambda) \text{ est donc bien une valeur propre de } P(u)}$ (et un vecteur propre de $P(u)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$ est x).

2) *Si u est diagonalisable... Quelle caractérisation de la diagonalisabilité utiliser ici ? Attention à ne pas sortir de condition suffisante mais pas nécessaire...*

Si u est diagonalisable , il existe une base $\beta = (e_1, ..., e_n)$ de E constituée uniquement de vecteurs propres de u. *Oui et alors ?*

Or, on a vu en 1) que si x est un vecteur propre de u, alors il est un vecteur propre de $P(u)$.
A vrai dire, ce n'était pas la conclusion à laquelle la question 1 demandait d'aboutir, mais c'est une conclusion secondaire que nous avons obtenue.

La base β est donc aussi une base de E constituée uniquement de vecteurs propres de $P(u)$. Ceci est une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité.
On en déduit que $P(u)$ est diagonalisable.

3) *Si la réciproque était vraie, il s'agirait de montrer que si $P(u)$ est diagonalisable, alors u l'est aussi... Ça parait, de prime abord, peu commode à démontrer. Et si on cherchait plutôt un contre-exemple ?*
Un polynôme relativement simple qu'on peut considérer est X^2. Commençons donc par chercher un endomorphisme non diagonalisable dont le carré est diagonalisable...

Posons $P(X) = X^2$ Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

u^2 est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

A^2 est évidemment diagonalisable car diagonale. Donc u^2 est diagonalisable. (u^2 est en fait l'endomorphisme nul)
Mais A n'est pas diagonalisable ! En effet, A est une matrice triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Son unique valeur propre est donc 0, et si elle était diagonalisable, elle s'écrirait $A = PDP^{-1}$ avec P une matrice inversible et D une matrice diagonale avec des 0 sur la diagonale... Autrement dit, $D = 0$! Et on aurait alors $A = 0$ (matrice nulle), ce qui n'est pas.
L'endomorphisme u n'est donc pas diagonalisable. Et pourtant $u^2 = P(u)$ est diagonalisable. La réciproque est donc fausse.

Comment ai-je eu l'idée de ce contre-exemple ? Il s'agissait de prendre une matrice triangulaire supérieure non nulle, à diagonale nulle, avec un unique coefficient non nul. Son caractère triangulaire et de diagonale nulle me permettait de savoir que sa seule valeur propre était 0, et qu'elle n'était pas diagonalisable pour les raisons évoquées ci-dessus. Enfin, en la choisissant ainsi, je m'assurais que son carré était une matrice nulle, donc diagonale, donc diagonalisable...