Indice de nilpotence

Ayoub Hajlaoui

L'algèbre est un délice aux arômes intenses.
Majorons ton indice, exquise nilpotence.

Énoncé : (temps conseillé : 10 min)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n finie ($n > 0$), et soit f un endomorphisme nilpotent de E, d'indice de nilpotence k. Montrer que k est inférieur ou égal à n.

Correction :

Par définition, k est le plus petit entier naturel tel que $f^k = 0$.
Le polynôme X^k (polynôme non nul) est donc un polynôme annulateur de f.

Méthode 1 : *sans utiliser la notion de polynôme minimal*

X^k est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$, donc f est trigonalisable, et admet donc au moins une valeur propre dans $\mathbb{R}$.
L'existence d'une valeur propre ici est utile à mentionner. En effet, pour un endomorphisme défini sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, rien ne garantit a priori l'existence d'une valeur propre réelle. (par contre, dans le cas où f est un endomorphisme défini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, l'existence d'une valeur propre complexe est assurée (tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ étant scindé sur $\mathbb{C}$)

Les valeurs propres de f sont donc des racines de X^k. Or, la seule racine de X^k est 0.
f a donc pour unique valeur propre 0.
On sait que les valeurs propres de f sont les racines du polynôme caractéristique P_f de f.
Notez la nuance avec : " Soit P un polynôme annulateur de f. les valeurs propres de f sont DES racines de P.

P_f a donc comme unique racine 0. De plus, il est de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$
Selon la convention choisie, il peut aussi être de coefficient dominant 1, selon qu'on choisisse $P_f = \det(f - X\mathrm{Id}_E)$ ou $P_f = \det(X\mathrm{Id}_E - f)$, mais ça ne changera rien pour nous ici.
On en conclut que $P_f = (-1)^n X^n$.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, P_f est un polynôme annulateur de f. Autrement dit : $f^n = 0$. Or, par définition de k, k est le plus entier naturel tel que $f^k = 0$.
$\boxed{\text{On en conclut finalement : } k \leq n.}$

Méthode 2 : *en utilisant la notion de polynôme minimal*

Le polynôme minimal Π_f de f est un polynôme unitaire (de coefficient dominant 1) annulateur de f, et qui divise tout polynôme annulateur de f. Donc Π_f divise X^k.
Le polynôme minimal s'écrit donc $\Pi_f = X^i$ avec $1 \leq i \leq k$. Et on a donc $f^i = 0$.
Mais k est le plus petit entier naturel tel que $f^k = 0$. Donc nécessairement : $\Pi_f = X^k$.

Or, le polynôme minimal est de degré inférieur ou égal à n
(parce que le cours nous le dit, mais si on nous demande pourquoi, on peut rétorquer que le polynôme caractéristique étant un polynôme annulateur de degré n, le polynôme miminal le divise et est donc de degré $\leq n$).

$\boxed{\text{On en conclut finalement : } k \leq n.}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com