Irrationalité de e

Ayoub Hajlaoui

D'absurde égalité en logique vautrée,
Irrationalité, je puis te démontrer.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$

1) Démontrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2) On admettra que leur limite est e. Démontrer que e est irrationnel.

Correction :

1) *Une première question relativement simple, application directe du cours.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. $\boxed{(u_n) \text{ est donc (strictement) croissante.}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - u_n - \frac{1}{n \times n!}$

On vient de calculer $u_{n+1} - u_n$...

Donc $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1) \times (n+1)!}$

D'où : $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1) \times (n+1)!} < 0$. $\boxed{(v_n) \text{ est donc (strictement) décroissante.}}$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \frac{1}{n \times n!}$ donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0}$

$\boxed{\text{Les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont donc adjacentes.}}$

2) *Si on se souvient vaguement d'une autre démonstration d'irrationalité, à savoir celle de* $\sqrt{2}$, *et/ou si l'on se rend compte que montrer directement l'irrationalité risque d'être compliqué (étant entendu qu'il est plus facile de définir directement un nombre rationnel qu'un nombre irrationnel), on a l'idée d'un raisonnement par l'absurde.*

Supposons par l'absurde que e est rationnel. Il existe donc deux nombres $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ (e étant positif) tels que e $= \frac{p}{q}$

Que savons-nous d'autre ? Que e est la limite des suites (u_n) *et* (v_n). *Fort bien, mais le passage à la limite risque de ne pas être commode pour traiter de la rationalité ou de l'irrationalité... Par ailleurs, nous avons aussi des relations de comparaison entre e,* u_n *et* v_n...

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < e < v_n$, c'est-à-dire : $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \times n!}$

D'accord, mais comment se servir de cet encadrement, valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *?*

On pourrait l'appliquer à q (le dénominateur dans l'écriture fractionnaire de e qu'on a posée)... Pourquoi ? Déjà, parce qu'on n'a pas forcément d'autre idée a priori, et ensuite, parce que q se retrouverait aussi au dénominateur dans nos encadrants, et peut-être peut-on escompter quelques simplifications...

On a donc notamment : $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q \times q!}$

Que faire de cet encadrement ? On serait peut-être tentés de le multiplier par q... Mais il vaut mieux y aller plus franchement, et le multiplier par $q \times q!$, pour ne plus manipuler que des entiers.

En multipliant chaque membre par $\dfrac{1}{q \times q!} > 0$, on obtient : $q \times q! \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < p \times q! < q \times q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + 1$

$q \times q! \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$ est un entier.

En effet, pour tout entier k compris entre 0 et q, $\dfrac{q!}{k!}$ est un entier (le produit $k!$ étant contenu dans le produit $q!$). Donc, par somme d'entiers, $q! \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$ est entier. Enfin, par produit d'entiers, $q \times q! \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$ est un entier.

Revoyons donc le dernier encadrement obtenu à la lueur de ce que nous venons d'énoncer...

$p \times q!$ est un entier, et il est strictement compris entre deux entiers consécutifs, à savoir $q \times q! \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$ et $q \times q! \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + 1$. Ce qui est absurde.

Notre supposition de départ (« e rationnel ») est donc fausse. $\boxed{\text{e est donc irrationnel.}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com