Racines n-ièmes et équivalent

Ayoub Hajlaoui

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

On pose, pour tout entier naturel non nul n, $u_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$.
Déterminer un équivalent de u_n.

Correction :

On sent déjà qu'il va falloir faire intervenir les fonctions exponentielle et ln. Mais si l'on se lançait tout de suite dans cette démarche, on écrirait : $u_n = \exp\big(\frac{1}{n+1}\ln(n+1)\big) - \exp\big(\frac{1}{n}\ln(n)\big)$. *Les termes* $\ln(n)$ *et* $\ln(n+1)$ *nous bloqueraient en termes de développement limité. Et si l'on voulait rechercher séparément des équivalents de* $\exp\big(\frac{1}{n+1}\ln(n+1)\big)$ *et* $\exp\big(\frac{1}{n}\ln(n)\big)$, *on n'aurait pas le droit de faire la différence de ces équivalents... Essayons donc une factorisation judicieuse au préalable.*

Pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \big(n(1+\frac{1}{n})\big)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n+1}}(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$

Donc $u_n = n^{\frac{1}{n}}\big(n^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n+1}} - 1\big)$

Donc $u_n = \exp\big(\frac{\ln(n)}{n}\big) \times \left[\exp\left(\big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\big)\ln(n)\right)\exp\left(\frac{1}{n+1}\times\ln(1+\frac{1}{n})\right) - 1\right]$

Donc $u_n = \exp\big(\frac{\ln(n)}{n}\big) \times \left[\exp\left(-\frac{\ln(n)}{n(n+1)}\right)\exp\left(\frac{1}{n+1}\times\ln(1+\frac{1}{n})\right) - 1\right]$

D'où : $u_n = \exp\big(\frac{\ln(n)}{n}\big) \times \left[\exp\left(-\frac{\ln(n)}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1}\times\ln(1+\frac{1}{n})\right) - 1\right]$

Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Donc, par continuité de la fonction exponentielle en 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\big(\frac{\ln(n)}{n}\big) = e^0 = 1$. Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp\left(-\frac{\ln(n)}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1}\times\ln(1+\frac{1}{n})\right) - 1$

J'espère qu'on peut tout de même faire mieux que ça...

Par croissance comparée et produit de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{\ln(n)}{n(n+1)} = 0$

De plus (la fonction ln étant continue en 1) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = 0$

Donc, par opérations simples sur les limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{\ln(n)}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1}\times\ln(1+\frac{1}{n}) = 0$

(Et rappelons : $\exp(x) - 1 \underset{x\to0}{\sim} x$*)*

Donc $\exp\left(-\frac{\ln(n)}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1}\times\ln(1+\frac{1}{n})\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1}\times\ln(1+\frac{1}{n})$.

Par transitivité de la relation $\sim$, on a donc : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1}\times\ln(1+\frac{1}{n})$

(Sans mauvais jeu de mot, la relation d'équivalence $\sim$ *est une relation d'équivalence...)*

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Autrement dit : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-\ln(n) + n\ln(1+\frac{1}{n})}{n(n+1)}$.

Or, rappelons : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Donc $\ln(1+\dfrac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, d'où, par produit d'équivalents : $n\ln(1+\dfrac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

Rappelons que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} l$ a du sens lorsque $l \in \mathbb{R}^*$, et que c'est juste une manière (alambiquée, certes) de dire : $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$

D'où : $n\ln(1+\dfrac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ *(on pouvait aussi le faire en posant $x = \dfrac{1}{n}$, sachant : $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$)*

Donc $n\ln(1+\dfrac{1}{n}) = \mathrm{o}\big(-\ln(n)\big)$ *($-\ln(n)$ tendant vers $-\infty$ lorsque $n \to +\infty$)*

On peut donc écrire : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-\ln(n) + \mathrm{o}\big(-\ln(n)\big)}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(n)}{n(n+1)}$ par quotient d'équivalents

C'est déjà beaucoup mieux ! Mais on peut encore faire un petit effort.

$n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, donc par produit et quotient d'équivalents : $-\dfrac{\ln(n)}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(n)}{n^2}$

Finalement : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(n)}{n^2}}$ *OUF*

Et si, le jour J, la calculatrice est autorisée, je vérifie avec de gros n si le quotient entre u_n et l'équivalent que je viens d'obtenir a bien l'air d'être proche de 1.