Relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ et cardinal des classes

Ayoub Hajlaoui

À sa nomination, le cardinal est classe.
Sa prise de fonction émeut toute la place.

Énoncé : (temps conseillé : 30 min)

Soit $\mathcal{R}$ la relation ainsi définie sur $\mathbb{R}$: pour tous réels x et y, $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $(x^3+2)(y^2+1) = (y^3+2)(x^2+1)$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Déterminer, en fonction du réel x, le cardinal de la classe d'équivalence de x.

Correction :

1) Pour tout réel x, $(x^3+2)(x^2+1) = (x^3+2)(x^2+1)$. Autrement dit, $x\mathcal{R}x$.
$\mathcal{R}$ est donc réflexive.

Pour tous réels x et y, si $(x^3+2)(y^2+1) = (y^3+2)(x^2+1)$, alors $(y^3+2)(x^2+1) = (x^3+2)(y^2+1)$
Si l'on veut frimer un peu : « ... par symétrie de la relation d'équivalence = sur $\mathbb{R}$ »
Donc : pour tous réels x et y, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$. $\mathcal{R}$ est donc symétrique.

Soient trois réels x, y et z tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$.
Autrement dit : $(x^3+2)(y^2+1) = (y^3+2)(x^2+1)$ et $(y^3+2)(z^2+1) = (z^3+2)(y^2+1)$
Comment obtenir, à partir de ces deux égalités, une égalité qui ne fasse intervenir que x et z ?
On peut encore écrire : $\dfrac{x^3+2}{x^2+1} = \dfrac{y^3+2}{y^2+1}$ et $\dfrac{y^3+2}{y^2+1} = \dfrac{z^3+2}{z^2+1}$ (x^2+1, y^2+1, et z^2+1 non nuls)
D'où *(par transitivité de la relation = sur $\mathbb{R}$)* : $\dfrac{x^3+2}{x^2+1} = \dfrac{z^3+2}{z^2+1}$.
Donc $(x^3+2)(z^2+1) = (z^3+2)(x^2+1)$, c'est-à-dire : $x\mathcal{R}z$.
On a montré, pour tous réels x, y et z : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$. $\mathcal{R}$ est donc transitive.

$\boxed{\text{Finalement, } \mathcal{R} \text{ est bien une relation d'équivalence.}}$

2) *Pour répondre à cette question, quelle écriture de $x\mathcal{R}y$ convient le mieux ?*

Pour tous réels x et y, $x\mathcal{R}y \iff \dfrac{x^3+2}{x^2+1} = \dfrac{y^3+2}{y^2+1}$
Et à ce stade, l'introduction d'une fonction est la bienvenue... Deux réels x et y sont dans la même classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$ si et seulement si ils ont la même image par une telle fonction...
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2+1}$.
Pour tous réels x et y, $x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$. Étudions donc les variations de f sur $\mathbb{R}$.
f est dérivable sur son domaine de définition ($\mathbb{R}$) car c'est une fonction rationnelle.
Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3+2)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x(x^3+3x-4)}{(x^2+1)^2}$
Le polynôme X^3+3X-4 a pour racine évidente 1.

On cherche trois réels a, b et c tels que $X^3+3X-4=(X-1)(aX^2+bX+c)$, c'est-à-dire (en développant le membre de droite) tels que $X^3+3X-4=aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c$
Par identification, on obtient : $a=1$, $b-a=0$ $c-b=3$ et $-c=-4$. D'où : $a=b=1$ et $c=4$.

Pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}$ avec $(x^2+1)^2>0$ et $x^2+x+4>0$ *(discriminant strictement négatif et coefficient dominant positif)*
$f'(x)$ est donc du signe de $x(x-1)$. D'où le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

À partir de ce tableau de variation (et du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), nous savons que l'équation $f(x)=\dfrac{3}{2}$ admet une unique solution α_1 sur $]-\infty\ ;\ 0\ [$, et de même que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α_2 sur $]\ 1\ ;\ +\infty[$. Déterminons si possible ces solutions.
Fort bien, mais quel rapport avec la question ? Cela nous permettra tout simplement de déterminer, en fonction de la valeur de x, le nombre de réels qui ont la même image que x par f... C'est-à-dire le nombre d'éléments dans la classe de x pour la relation $\mathcal{R}$.
Remarquons : $f(2)=\dfrac{2^3+2}{2^2+1}=\dfrac{10}{5}=2$. Donc $\alpha_2=2$.
De même, $f(-0,5)=\dfrac{-\frac{1}{8}+2}{\frac{1}{4}+1}=\dfrac{\frac{15}{8}}{\frac{5}{4}}=\dfrac{15}{8}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{3}{2}$. Donc $\alpha_1=-0,5$.
Bon... Autant α_2 pouvait être considérée comme une solution évidente, mais alors α_1... Honnêtement, c'est le fait d'avoir trouvé α_2 directement qui m'a donné envie de chercher aussi α_1 de cette façon. J'ai essayé -1, $f(-1)$ était trop petit, et je n'ai pas baissé les bras.
Si on n'avait pas vu ces solutions « évidentes », on aurait pu résoudre les équations directement. On aurait eu affaire à des polynômes du troisième degré dont on connaît déjà une racine (sachant que $f(x)=2$ a aussi 0 comme solution et $f(x)=\dfrac{3}{2}$ a aussi 1 comme solution)...

Le tableau de variation de f peut être agrémenté ainsi :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		2		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

On peut enfin revenir à la question de l'énoncé...
Notons $\mathrm{cl}(x)$ la classe d'équivalence du réel x pour $\mathcal{R}$. Du tableau de variation de f, on conclut ce qui suit :
Pour $x<-\dfrac{1}{2}$ et pour $x>2$, $\mathrm{cl}(x)$ possède un unique élément (x lui-même, aucun autre réel n'a la même image).
Pour $x\in\{-\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$, $\mathrm{cl}(x)$ possède deux éléments (x lui-même et un autre réel).
Enfin, pour $x\in\ ]-\dfrac{1}{2}\ ;\ 2\ [\setminus\{0;1\}$, $\mathrm{cl}(x)$ possède trois éléments.