# Représentation des formes linéaires dans un espace euclidien

Ayoub Hajlaoui

*Les formes linéaires, sur ce genre d'espace,*
*Choisissent un vecteur les suppléant sur place.*

**Énoncé :** (temps conseillé : 25 min)

Soit $E$ un espace euclidien (de dimension non nulle) de produit scalaire $\varphi$, et soit $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire.

1) Montrer qu'il existe un unique vecteur $y$ de $E$ vérifiant : $\forall x \in E,\ f(x) = \varphi(x, y)$
*Indication : on pourra considérer une base orthonormée de $E$.*

2) Soit $n$ un entier naturel. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A$ de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(0) = \int_0^1 P(t)A(t)dt$

**Correction :**

*Si l'énoncé nous propose de considérer une base orthonormée de $E$, considérons-la...*
$E$ est un espace euclidien, donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $n$ sa dimension. Il existe une base $B = (e_1, ..., e_n)$ orthonormée de $E$.

*Et là, que faire pour démarrer ? Si l'on pouvait partir d'un tel vecteur $y$, on pourrait dérouler nos calculs... Mais il faut donc commencer par supposer l'existence de cet élément. Pourquoi pas, dans le cadre d'une analyse-synthèse ? Si $y$ existe, alors $y$ doit vérifier telle(s) condition(s) (analyse), puis, synthèse...*

Supposons qu'il existe $y \in E$ tel que, pour tout $x \in E,\ f(x) = \varphi(x, y)$ *Qu'en faire ?*
Cette propriété étant vraie pour tout vecteur $x$ de $E$, elle est notamment vraie pour tous les éléments $e_i$ de la base $B$. Autrement dit, pour tout $i$ compris entre 1 et $n$ : $f(e_i) = \varphi(e_i, y)$
*Où dans le cours avons-nous pu voir des $\varphi(e_i, y)$ ?*

$B = (e_1, ..., e_n)$ étant une base orthonormée de $E$, on a l'égalité suivante : $y = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i, y)e_i$

Donc, d'après ce qui précède : $y = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\ e_i$.

On a donc montré : si $y$ existe, $y$ est unique et $y = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\ e_i$ *(fin de l'analyse)*

Montrons maintenant que $y = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\ e_i$ convient.

$B = (e_1, ..., e_n)$ est une base de $E$. Donc pour tout vecteur $x$ de $E$, il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. On a alors, d'une part : $f(x) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$ par linéarité de $f$.

D'autre part, $\varphi(x, y) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{k=1}^{n} f(e_k)\ e_k\Big)$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

*$i$ et $k$, deux noms d'indices différents pour ne pas faire de bêtise ensuite, vu que je sens arriver la double somme...*

Donc, par bilinéarité de $\varphi$, $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_i f(e_k)\ \varphi(e_i,e_k)$

Or, pour tout $i$ compris entre 1 et $n$, le seul terme non nul de la somme $\sum_{k=1}^{n} \lambda_i f(e_k)\ \varphi(e_i,e_k)$ est $\lambda_i f(e_i)\ \varphi(e_i,e_i)$, c'est-à-dire $\lambda_i f(e_i)$ (car $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée)

Donc $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$.

On a montré $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$ d'une part, et $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$ d'autre part.

Donc $f(x) = \varphi(x,y)$, et cette égalité est valable pour tout vecteur $x$ de $E$.

Le vecteur $y = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\ e_i$ convient bien. *(fin de la synthèse)*

En conclusion, il existe bien un unique vecteur $y$ de $E$ vérifiant : $\forall x \in E,\ f(x) = \varphi(x,y)$

2) *Quel rapport avec la première question ? Il serait bon de voir un produit scalaire et une forme linéaire...*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = P(0)$. $f$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Et, pour tous polynômes $P$ et $Q$ de $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout réel $\lambda$ :

$f(P+\lambda Q) = (P+\lambda Q)(0) = P(0)+\lambda Q(0) = f(P)+\lambda f(Q)$. $f$ est donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrons maintenant que la forme $\varphi$ définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ par $\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire.

*Vu la question, dire : « c'est un produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}_n[X]$ » fait un peu flemmard.*
*Dire « c'est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}_n[X]$ »serait carrément faux (le produit scalaire le plus souvent qualifié comme canonique sur sur $\mathbb{R}_n[X]$ renvoyant, à ma connaissance, la somme des produits des coefficients de même degré des deux polynômes).*
*Dire : « Si on le définit sur $C([0,1],\mathbb{R})$, $\phi$ est le produit scalaire canonique sur $C([0,1],\mathbb{R})$ »serait, à la rigueur, juste, mais il serait faux de dire $\mathbb{R}_n[X] \subset C([0,1],\mathbb{R})$ (même en amalgamant polynôme et fonction polynôme, ça ne colle pas en termes d'ensemble de départ... Il faudrait discuter ensuite pour se permettre de passer de $C([0,1],\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}_n[X]$, discussion dans laquelle on risque de dire pas mal d'âneries.)*

*Voilà pourquoi le plus prudent (et même peut-être le plus simple) ici est de faire la démo classique.*

Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $\varphi$ est symétrique.

Pour tous polynômes $P_1$, $P_2$ et $Q$ de $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout réel $\lambda$ :

$\varphi(P_1+\lambda P_2, Q) = \int_0^1 (P_1+\lambda P_2)(t)Q(t)dt = \int_0^1 P_1(t)Q(t)dt + \lambda \int_0^1 P_2(t)Q(t)dt$ (linéarité de l'intégration)

Donc $\varphi(P_1+\lambda P_2, Q) = \varphi(P_1,Q) + \lambda\varphi(P_2,Q)$. $\varphi$ est donc linéaire à gauche.

Et, comme elle est symétrique, elle est aussi linéaire à droite. $\varphi$ est donc bilinéaire.

Pour tout $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P,P) = \int_0^1 P^2(t)dt \geq 0$ par intégration d'une fonction positive.

$\varphi$ est donc positive.

Enfin, pour tout $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$, si $\varphi(P,P) = 0$ : $\int_0^1 P^2(t)dt = 0$, avec $P^2$ continue et positive sur $[0\ ;\ 1]$. Donc la fonction polynôme $P$ est nulle sur $[0\ ;\ 1]$.

*Attention, on n'a pas encore prouvé la nullité de $\boldsymbol{P}$...*
La fonction polynôme $\boldsymbol{P}$ admet une infinité de racines (tous les réels de $[0\ ;\ 1]$). $\boldsymbol{P}$ est donc le polynôme nul.
$\boldsymbol{\varphi}$ est donc définie positive.
Finalement, $\boldsymbol{\varphi}$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Muni du produit scalaire $\boldsymbol{\varphi}$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $\boldsymbol{n+1}$ finie $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace euclidien. Le résultat de 1) nous garantit donc ce qui suit :

$$\boxed{\text{il existe un unique polynôme } \boldsymbol{A} \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ vérifiant : } \forall \boldsymbol{P} \in \mathbb{R}_n[X],\ \boldsymbol{P}(0) = \int_0^1 \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}(t)dt.}$$

*Et si on nous demandait qui est ce polynôme $\boldsymbol{A}$, on pourrait se servir d'une base orthonormale $(e_1, e_2, ...e_{n+1})$ de $\mathbb{R}_n[X]$ pour $\boldsymbol{\varphi}$ (attention, la base canonique n'en est pas une ! Il faut par exemple utiliser le procédé d'orthonormalisation de Schmidt...) pour écrire* $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\ e_i = \sum_{i=1}^{n} e_i(0)\ e_i$