Calcul de la somme d'une série alternée

Ayoub Hajlaoui

Pour ce problème à qui pourrais-je me fier ?
Au couturier anglais, mais mal orthographié.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

1) Montrer que pour tout réel positif x et pour tout entier naturel non nul n :

$$\left|\ln(1+x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k\right|\leq\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

2) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge et déterminer sa somme.

Correction :

1) *À quoi vous fait penser l'expression à l'intérieur de la valeur absolue ? À une formule de Taylor. Mais laquelle ? On nous demande de montrer une égalité...*

Soient $x\in\mathbb{R}_+$ et $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction $\ln$ est de classe C^∞ sur $[1;1+x]$.
Pour tout entier naturel k, notons $\ln^{(k)}$ la dérivée k-ième de $\ln$
Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, pour tout $t>0$, $\ln^{(k)}(t)=\dfrac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{t^k}$
Cette formule se démontre simplement par récurrence, mais si on ne la connaît pas, comment en avoir l'idée ? En regardant les premières dérivées : $\ln'(t)=\dfrac{1}{t}$, $\ln^{(2)}(t)=-\dfrac{1}{t^2}$, $\ln^{(3)}(t)=\dfrac{2}{t^3}$, $\ln^{(4)}(t)=-\dfrac{2\times3}{t^4}$, $\ln^{(5)}(t)=\dfrac{2\times3\times4}{t^5}$...

On veut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $\ln$ *entre* 1 *et* $1+x$*. Mais pour cela, il faudra majorer* $|\ln^{(n+1)}|$ *sur* $[1\ ;\ 1+x]$.

$\forall t\in[1;1+x]$, $|\ln^{(n+1)}(t)|=\left|\dfrac{(-1)^{n+2}n!}{t^n}\right|=\dfrac{n!}{t^n}$ *(soit dit en passant,* $(-1)^{n+2}=(-1)^n$*, même si on s'en fiche ici)*
Donc, par décroissance de la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^n}$ sur $\mathbb{R}_+^*$: $\forall t\in[1;1+x]$, $|\ln^{(n+1)}(t)|\leq\dfrac{n!}{1^n}=n!$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction ln sur $[1;1+x]$:

$$\left|\ln(1+x)-\ln(1)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(1+x-1)^k}{k!}\ln^{(k)}(1)\right|\leq n!\times\frac{|1+x-1|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Autrement dit : $\displaystyle\left|\ln(1+x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{1^k}\right|\leq n!\times\frac{|x|^{n+1}}{n+1}$

Finalement, pour tout réel positif x et pour tout entier naturel non nul n :

$$\boxed{\left|\ln(1+x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k\right|\leq\frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

2) *Il faut rapidement voir le rapport avec la question précédente. L'inégalité établie est valable pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, et pour tout* $x \geq 0$*. Or, il n'y a plus de trace de* x *dans la série que nous devons considérer...*

L'inégalité montrée précédemment est vraie pour tout entier naturel n non nul, et pour tout $x \geq 0$, donc notamment pour $x = 1$.

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq \left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}$, avec $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

D'après le théorème des gendarmes, on a donc : $\lim_{n \to +\infty} \left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| = 0$

Autrement dit : $\lim_{n \to +\infty} \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 0$. C'est-à-dire : $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$

Donc $\boxed{\text{la série } \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{ converge et } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)}$

D'une pierre deux coups ! Quand l'énoncé nous demande « montrer que la série converge et déterminer sa somme », ça ne veut pas forcément dire qu'il faut le faire en deux temps.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com