Caractérisation des projecteurs orthogonaux par la norme

Ayoub Hajlaoui

Cet écrit nous informe sur les projecteurs
qui diminuent les normes de tous les vecteurs.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

Soit E un espace euclidien de produit scalaire $< \, , \, >$ et de norme associée $\|.\|$, et soit p un projecteur de E.
Démontrer l'équivalence suivante : p est un projecteur orthogonal $\iff \forall x \in E, \; \|p(x)\| \leq \|x\|$

Correction :

1) Si p est un projecteur orthogonal, pour tout vecteur x de E, x et $x - p(x)$ sont orthogonaux. On a alors : $\forall x \in E, \|x\|^2 = \|p(x) + x - p(x)\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$ d'après le théorème de Pythagore. Or, $\|x - p(x)\|^2 \geq 0$. Donc $\|x\|^2 \geq \|p(x)\|^2$.
Enfin, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on obtient, pour tout vecteur x de E : $\|x\| \geq \|p(x)\|$.
On a bien montré l'implication : p est un projecteur orthogonal $\Longrightarrow \; \forall x \in E, \; \|p(x)\| \leq \|x\|$

Réciproquement, si p est un projecteur tel que pour tout vecteur x de E, $\|p(x)\| \leq \|x\|$:

Comment montrer que p est un projecteur orthogonal ? Il suffit de montrer que Im p et Ker p sont orthogonaux. Autrement dit, il suffit de montrer que pour tout vecteur x de Ker p et pour tout vecteur y de Im p , $< x, y > = 0$

Soient $x \in$ Ker p et $y \in$ Im p.

Et c'est là que l'élève qui connaît bien ses démos de cours classiques est grandement avantagé. En l'occurrence, la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. L'idée était de s'intéresser à $\|x + \lambda y\|^2$ (avec λ réel), de le développer et d'utiliser sa positivité et le fait que ce soit un polynôme de λ du second degré pour en déduire une inégalité (grâce au discriminant dudit polynôme). Je ne dis pas qu'il faut avoir tout ça en tête lorsque, comme dans notre cas, on doit démontrer $< x, y > = 0$. Je dis que c'est ici une bonne idée d'utiliser l'inégalité à notre disposition, valable pour tout vecteur de E, en l'appliquant à $x + \lambda y$. Et ce, afin de profiter du fait que ce soit valable pour tout réel λ...

Pour tout réel λ : $\|x + \lambda y\|^2 = < x + \lambda y, x + \lambda y > = \|x\|^2 + 2\lambda < x, y > + \lambda^2 \|y\|^2$ par bilinéarité du produit scalaire.
Et $\|p(x + \lambda y)\|^2 = \|p(x) + \lambda p(y)\|^2$ par linéarité de l'endomorphisme p.
Donc $\|p(x + \lambda y)\|^2 = \|0 + \lambda y\|^2$ ca $x \in$ Ker p et $y \in$ Im p (et donc $p(y) = y$ car p projecteur)
Autrement dit : $\|p(x + \lambda y)\|^2 = \lambda^2 \|y\|^2$.

Or, par hypothèse, $\|p(x + \lambda y)\|^2 \leq \|x + \lambda y\|^2$. Donc : $\lambda^2 \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\lambda < x, y > + \lambda^2 \|y\|^2$
D'où : pour tout réel λ, $0 \leq \|x\|^2 + 2\lambda < x, y >$
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(\lambda) = \|x\|^2 + 2\lambda < x, y >$. g est une fonction affine positive sur $\mathbb{R}$, donc elle est en fait constante. Le coefficient directeur $2 < x, y >$ est donc nul.

Donc $< x, y > = 0$. Et cela étant valable pour tous $x \in \text{Ker } p$ et $y \in \text{Im } p$, nous pouvons en déduire que le projecteur p est orthogonal.
On a bien montré l'implication : $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\| \implies p$ est un projecteur orthogonal

En conclusion, pour tout projecteur p de E, l'équivalence suivante est vraie :
$\boxed{p \text{ est un projecteur orthogonal} \iff \forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|}$

Remarque : pour la seconde implication, si on avait considéré $\lambda x + y$ au lieu de $x + \lambda y$, on aurait aussi pu parvenir à nos fins, même si c'était légèrement plus compliqué (et peut-être, dans un sens, plus proche de la démo de Cauchy-Schwarz) :
$p(\lambda x + y) = \lambda p(x) + p(y) = p(y) = y$ *donc* $\|p(x + \lambda y)\|^2 = \|y\|^2$.
Et $\|\lambda x + y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda < x, y > + \|y\|^2$
L'hypothèse donne alors : $\|y\|^2 \leq \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda < x, y > + \|y\|^2$, *c'est-à-dire :*
$\lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda < x, y > \geq 0$, *et ce pour tout réel* λ
Si $\|x\|^2 \neq 0$, *nous avons donc un trinôme du second degré en* λ, *de signe constant. Son discriminant* $4 < x, y >^2$ *est donc négatif ou nul. Donc le carré de réel* $< x, y >^2$ *est négatif ou nul. Donc* $< x, y > = 0$. *(et si* $\|x\|^2 = 0$, *ça reste vrai)*

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com