Continuité d'une fonction de deux variables réelles

Ayoub Hajlaoui

Approcher l'origine.. Mais quel chemin choisir ?
Sur le plan se dessinent des choix à loisir.

Énoncé : (temps conseillé : 20 min)

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1) f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^4}{x^6+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2) g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Correction :

1) Les fonctions $(x,y) \mapsto x^2y^4$ et $(x,y) \mapsto x^6+y^6$ sont polynomiales donc continues, et $(x,y) \mapsto x^6+y^6$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Donc, par quotient de fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
Évident mais à dire. Notre développement aura beau porter principalement sur $(0,0)$, il faut relever qu'ailleurs qu'en $(0,0)$, ça se passe bien pour la continuité.

Maintenant, si l'on veut montrer la continuité de f en $(0,0)$, il faut montrer :
$|f(x,y) - f(0,0)| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$
Mais il faut bien comprendre la notion $(x,y) \to (0,0)$. Dire que (x,y) tend vers $(0,0)$, c'est dire que, sur le plan, le point de coordonnées (x,y) se rapproche autant qu'on veut de l'origine du repère. Mais, contrairement à la droite réelle, où se rapprocher d'un point ne peut se faire que de deux côtés, se rapprocher d'un point $A(x_A, y_A)$ du plan peut se faire d'une infinité de façons, via toute droite, et plus généralement toute courbe qui passe par A.

Montrer la continuité en $(0,0)$ revient à montrer que quelle que soit la manière d'approcher (x,y) de $(0,0)$, $f(x,y)$ se rapproche autant que l'on veut de $f(0,0)$ du moment que (x,y) est assez proche de $(0,0)$,
Mais pour montrer la non-continuité en $(0,0)$, il suffit de montrer qu'il existe une manière pour (x,y) de s'approcher de $(0,0)$ pour laquelle $f(x,y)$ ne tend pas vers $f(0,0)$. Souvent via une droite, en imposant par exemple $y = x$...

Remarquons que pour tout $x \neq 0$, $f(x,x) = \dfrac{x^6}{2x^6} = \dfrac{1}{2}$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) \neq 0$.
Autrement dit, si (x,y) se rapproche de $(0,0)$ via la droite d'équation $y = x$, $f(x,y)$ ne tend pas vers $f(0,0)$...
Donc on n'a pas : $|f(x,y) - f(0,0)| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$. f n'est donc pas continue en $(0,0)$.

$\boxed{f \text{ est donc continue sur } \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \text{ mais pas sur } \mathbb{R}^2}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

2) Les fonctions $(x, y) \mapsto xy^3$ et $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ sont polynomiales donc continues, et $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$. Donc, par quotient de fonctions continues, g est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

Peut-on, comme en 1, montrer la non-continuité en $(0, 0)$*, en approchant* $(0, 0)$ *via des directions particulières ? On a par exemple* $g(x, x) = \dfrac{x^4}{2x^2} = \dfrac{x^2}{2}$*. Mais lorsque* (x, y) *se rapproche de* $(0, 0)$ *(ce qui implique que* x *se rapproche de* 0*),* $\dfrac{x^2}{2}$ *se rapproche bien de* 0*, c'est-à-dire de* $f(0, 0)$*. Ce n'est donc pas une « direction contre-exemple ». On peut en essayer d'autres (en calculant* $f(x, 0)$ *puis en faisant tendre* x *vers* 0*, ce qui correspond à se rapprocher de* $(0, 0)$ *via l'axe des abscisses ; ou encore en calculant* $f(0, y)$ *puis en faisant tendre* y *vers* 0*, ce qui correspond à se rapprocher de* $(0, 0)$ *via l'axe des ordonnées), mais l'on se rend compte que les quantités obtenues tendent bien vers* $(0, 0)$*.*
Peut-être faut-il prouver la continuité, en fait... À part notre échec à trouver une « direction contre-exemple », qu'est-ce qui aurait pu nous mettre la puce à l'oreille ? Le xy *présent en produit dans le numérateur, et le* $x^2 + y^2$ *du dénominateur...*

Pour tous réels x et y, $|xy| \leq \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$. *inégalité bien utile, et très facile à démontrer, à garder en tête. L'un de mes profs de prépa l'appelait « la clé », tant elle peut ouvrir de portes lorsqu'on cherche une minoration/majoration.*
En effet, d'une part : $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ (car $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$), d'où : $xy \leq \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$
Et d'autre part, $x^2 + 2xy + y^2 \geq 0$ (car $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$), d'où : $-xy \leq \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$
Or, $|xy| = \max(xy, -xy)$, avec xy et $-xy$ tous deux inférieurs ou égaux à $\dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$
Donc $|xy| \leq \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$ (*)

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |g(x, y)| = \frac{|xy^3|}{|x^2 + y^2|} = \frac{|xy \times y^2|}{x^2 + y^2} = \frac{|xy| \times y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \times y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{(d'après (*))}$$

Donc, pour tous réels x et y, $0 \leq |g(x, y)| \leq \dfrac{y^2}{2}$. Or, $\dfrac{y^2}{2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$.
Donc, par théorème des gendarmes : $|g(x, y)| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$.
Autrement dit : $|g(x, y) - g(0, 0)| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$. g est donc continue en $(0, 0)$.

$\boxed{\text{Finalement, } g \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.}$

Même si j'ai fait le choix ici d'utiliser (*) (surtout pour évoquer son intérêt en général), j'aurais pu mener ma majoration autrement : $|g(x, y)| = \dfrac{|xy| \times y^2}{x^2 + y^2}$*. Or,* $0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2$*. Donc*

$$0 \leq \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1$$

Et donc : $0 \leq \dfrac{|xy| \times y^2}{x^2 + y^2} \leq |xy|$ *Autrement dit :* $0 \leq |g(x, y)| \leq |xy|$*, avec* $|xy| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$*...*