Convergence en loi

Ayoub Hajlaoui

Énoncé : (temps conseillé : 15 min) *d'après oral HEC, 2014*

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur $[0,1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, N_n est une variable aléatoire définie sur Ω, indépendante de tous les variables aléatoires de la suite U, et suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ (avec $n \geq 1$ et $0 < p < 1$)

On pose $M_n = \max(U_1, U_2 ..., U_n)$ et $T_n = \begin{cases} U_1 & \text{si l'événement } [N_n = 0] \text{ est réalisé} \\ M_k & \text{si l'événement } [N_n = k] \text{ est réalisé } (k \geq 1) \end{cases}$

Étudier la convergence en loi de $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Correction :

Si F_n est la fonction de répartition de T_n, on veut, pour tout réel x, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$ C'est-à-dire déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n \leq x)$. Mais l'expression de T_n dépend de la valeur de N_n ...

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. N_n suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, $N_n(\Omega) = [\![1;n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associé à N_n :

$$P(T_n \leq x) = \sum_{k=0}^{n} P\big((T_n \leq x) \cap (N_n = k)\big)$$

$$= P\big((T_n \leq x) \cap (N_n = 0)\big) + \sum_{k=1}^{n} P\big((T_n \leq x) \cap (N_n = k)\big) \quad \textit{(distinction utile vu la définition de } T_n\textit{)}$$

$$= P\big((U_1 \leq x) \cap (N_n = 0)\big) + \sum_{k=1}^{n} P\big((M_k \leq x) \cap (N_n = k)\big) \quad \textit{(par définition de } T_n\textit{)}$$

$$= P\big((U_1 \leq x) \cap (N_n = 0)\big) + \sum_{k=1}^{n} P\big((\max(U_1, ..., U_k) \leq x) \cap (N_n = k)\big) \quad \textit{max inférieur à } x \textit{ ssi..}$$

$$= P\big((U_1 \leq x) \cap (N_n = 0)\big) + \sum_{k=1}^{n} P\big(\big[\bigcap_{i=1}^{k} (U_i \leq x)\big] \cap (N_n = k)\big) \quad \textit{..tout le monde est inférieur à } x$$

$$= P(U_1 \leq x) \times P(N_n = 0) + \sum_{k=1}^{n} \Big[\Big(\prod_{i=1}^{k} P(U_i \leq x)\Big) \times P(N_n = k)\Big]$$ par indépendance de N_n avec les U_i et par indépendance des U_i

Les U_i suivent toutes une loi uniforme sur $[0,1]$. Soit F_U la fonction de répartition de cette loi.

On a alors : $P(T_n \leq x) = F_U(x) \times (1-p)^n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(F_U(x)\big)^k \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$= F_U(x) \times (1-p)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \big(pF_U(x)\big)^k (1-p)^{n-k} \quad \textit{binôme de Newton ? Il manque juste un terme...}$$

$$= F_U(x) \times (1-p)^n + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big(pF_U(x)\big)^k (1-p)^{n-k} - \binom{n}{0} \big(pF_U(x)\big)^0 (1-p)^n$$

$$= F_U(x) \times (1-p)^n + (pF_U(x) + 1 - p)^n - (1-p)^n$$

Rappelons : si $x \in]0,1[$, $F_U(x) = x$; si $x \leq 0, F_U(x) = 0$; et si $x \geq 1, F_U(x) = 1$

Donc :

- si $x \in]0,1[$: $P(T_n \leq x) = x(1-p)^n + (px+1-p)^n - (1-p)^n$

avec $0 < 1-p < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-p)^n = 0$;
et $px+1-p = 1-p(1-x)$. $0 < p < 1$ et $0 < 1-x < 1$ donc $0 < p(1-x) < 1$
Donc $0 < 1-p(1-x) < 1$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} (px+1-p)^n = 0$. Par somme de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n \leq x) = 0$

- si $x \leq 0$: $P(T_n \leq x) = (1-p)^n - (1-p)^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n \leq x) = 0$
- si $x \geq 1$: $P(T_n \leq x) = (1-p)^n + 1^n - (1-p)^n = 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n \leq x) = 1$.

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n \leq x) = F(x)$ avec $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire constante égale à 1.

$\boxed{(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge donc en loi vers } T = 1.}$