Corollaire du lemme de Grönwall

Ayoub Hajlaoui

De bonds en désarrois, les sujets qu'on dévale
Nous ont mené tout droit au lemme de Grönwall.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

Soit c un réel positif. Soient f et g deux fonctions continues et positives sur un segment $[a\ ;b]$ vérifiant, pour tout réel x de $[a\ ;b]$: $f(x) \leq c + \int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$

Le but de cet exercice est de montrer que pour tout réel x de $[a\ ;b]$: $f(x) \leq c\exp\Big(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\Big)$

1) Soient les fonctions u et v définies sur $[a\ ;b]$ par $u(x) = c + \int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et

$v(x) = u(x)\exp\Big(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\Big)$. Étudier les variations de v sur $[a\ ;b]$.

2) Conclure.

Correction :

1) g est continue sur $[a\ ;b]$ donc $x \longmapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a\ ;b]$, de dérivée g *(ce que certains appellent théorème fondamental de l'analyse).* Et la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc, par composée de fonctions dérivables, $x \longmapsto \exp\Big(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\Big)$ est dérivable sur $[a\ ;b]$.

De même, par produit de fonctions continues sur $[a\ ;b]$, fg est continue sur $[a\ ;b]$. La fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est donc dérivable sur $[a\ ;b]$, de dérivée fg.
u est donc dérivable sur $[a\ ;b]$ par somme de fonctions dérivables.

Enfin, par produit de fonctions dérivables sur $[a\ ;b]$, v est dérivable sur $[a\ ;b]$.

Pour tout réel x de $[a\ ;b]$, $v'(x) = u'(x)\exp\Big(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\Big) + u(x)\times\big(-g(x)\big)\times\exp\Big(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\Big)$

$= f(x)g(x)\exp\Big(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\Big) - \Big(c + \int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\Big)g(x)\exp\Big(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\Big)$

Nous cherchons à déterminer le signe de la quantité ci-dessous. Mettons-la donc sous une forme appropriée. Une factorisation est possible..

On a donc : $\forall x \in [a\ ;b],\ v'(x) = g(x)\exp\Big(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\Big)\Big[f(x) - c - \int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\Big]$

Pour tout $x \in [a\ ;b]$, $g(x) \geq 0$ (g positive par hypothèse), et $\exp\Big(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\Big) > 0$ (la fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$).
De plus : $\forall x \in [a\ ;b],\ f(x) - c - \int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq 0$ d'après l'inégalité donnée dans l'énoncé.

Donc, pour tout $x \in [a\,;b]$, $v'(x) \leq 0$. Finalement, $\boxed{\text{la fonction } v \text{ est décroissante sur } [a\,;b].}$

2) *« Conclure » ? Oui, l'énoncé entend que ces variations de* v *devraient nous permettre d'aboutir à l'inégalité demandée. « Le but de cet exercice est de montrer que... ». Mais comment les variations de* v *sur* $[a\,;b]$ *peuvent-elle nous faire aboutir à une telle inégalité ?*

v est décroissante sur $[a\,;b]$. Donc, pour tout $x \in [a\,;b]$, $v(a) \geq v(x) \geq v(b)$

Or, $v(a) = u(a)\exp\left(-\int_a^a g(t)\,\mathrm{d}t\right) = u(a)\exp(0) = c$

Donc, pour tout $x \in [a\,;b]$, $v(x) \leq c$. Autrement dit, $u(x)\exp\left(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq c$.

En multipliant les deux membres de cette inégalité par $\exp\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right) > 0$, on obtient :

$\forall x \in [a\,;b],\ u(x)\exp\left(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)\exp\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq c\exp\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$. On a donc :

$\forall x \in [a\,;b],\ u(x)\exp\left(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq c\exp\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$. Ou encore :

$\forall x \in [a\,;b],\ u(x) \leq c\exp\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

« Parfait, le membre de droite ! Mais... Pourquoi a-t-on $u(x)$ *à gauche ? Ce n'est pas ce qu'on devait obtenir ! » Mais si, c'est très bien, pas de panique.*
Lorsqu'à la fin de mon calcul, je n'obtiens pas exactement l'inégalité demandée mais un seul des deux membres, il se peut que mon calcul n'ait pas été judicieux (voire soit carrément faux). Mais il se peut aussi que je sois presque parvenu à mes fins, et qu'il me suffise de jouer de la transitivité de la relation $\leq$ *pour y aboutir...*

Par définition de u, on a donc, pour tout $x \in [a\,;b]$: $c + \int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq c\exp\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$

De plus, nous savons (inégalité posée comme hypothèse de départ par l'énoncé) :

$\forall x \in [a\,;b],\ f(x) \leq c + \int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Donc $f(x) \leq c + \int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq c\exp\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$

En conclusion, on a bien montré : $\boxed{\text{pour tout réel } x \in [a\,;b],\ f(x) \leq c\exp\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)}$

Après avoir démontré la décroissance de v *sur* $[a\,;b]$*, j'ai calculé* $v(a)$ *et utilisé le fait que, pour tout* $x \in [a\,;b]$, $v(x) \leq v(a)$ *pour aboutir à l'inégalité demandée par l'énoncé.*
Et si ça n'avait pas marché ? Et bien j'aurais calculé $v(b)$*, et j'aurais essayé d'utiliser le fait que, pour tout* $x \in [a\,;b]$, $v(x) \geq v(b)$*. Dans cet exercice, précisément, ça n'aurait servi à rien. Je dis juste ça pour insister sur le fait de bien utiliser les options à sa disposition lorsqu'on en a aussi peu.*